

# 非线性相对运动下空间碎片碰撞概率计算的研究\*

许晓丽<sup>1,2†</sup> 熊永清<sup>1</sup>

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

(2 中国科学院研究生院 北京 100049)

**摘要** 空间目标碰撞概率的计算是航天器进行空间碎片预警和规避机动的基础。为了简化计算,目前国内外在计算碰撞概率问题过程中大多基于线性相对运动的条件,将三维碰撞概率计算积分问题简化为位置误差概率密度函数在圆域内的二维积分问题。但是当空间目标相对运动速度较小时,这种线性运动条件不再成立,就需要在真实的非线性相对运动状态下重新考虑碰撞概率的计算问题。研究了非线性相对运动状态下碰撞概率计算的方法,并通过算例分析,验证了其正确性,适用于相对运动位置及其协方差随时间变化的情况。研究结果表明:在飞行器编队绕飞的椭圆相对运动过程中,相对速度在 100 m/s 以下时,采用线性方法与非线性方法得到的结果之间的相对误差超过 5%;同时在作圆轨道运动的两物体之间的接近分析过程中,相对速度在 10 m/s 以下时,相对误差也超过 1%。这些情况下需要考虑采用非线性方法进行碰撞概率的计算,为我国碰撞预警系统的完善提供一些有益的补充。

**关键词** 航天器, 方法: 分析

**中图分类号:** P 128; **文献标识码:** A

## 1 引言

随着空间碎片数目的日渐增多,人类的航天活动将面临着巨大的威胁。空间碎片的碰撞预警工作已经受到越来越多的关注<sup>[1-4]</sup>:早期航天器的碰撞预警主要基于 BOX 区域方法,通过两目标之间的相对距离定义警戒区和规避区,但是这种方法比较保守,预警次数较多而造成资源的浪费;后来提出了基于碰撞概率的预警决策,不仅考虑两目标之间的相对距离,还考虑了交会时二者位置与速度的几何关系及位置不确定性,能够更有效地实施规避机动,目前已成为航天器规避机动的基础。

国内外已有很多文献<sup>[5-8]</sup>对碰撞概率的计算方法进行了研究,一般情况下都基于如下假设:(1)已知两目标最接近时刻在惯性坐标系中的位置和速度;(2)已知两目标最接近时刻在星体坐标系中的位置误差矩阵;(3)将两目标的几何形状等效为半径已知的

2010-06-17 收到原稿, 2010-07-19 收到修改稿

\* 国家自然科学基金项目 (10773033) 资助

† xlxu@pmo.ac.cn

球体；(4) 由于整个相遇过程是在很短的时间内发生的，两目标间的相对运动被近似为线性相对运动；(5) 交会过程中没有加速度变化，位置误差不确定性保持不变，并满足正态分布。

碰撞概率实际上是二者之间最小相对距离小于等效半径之和的概率，也就是误差概率密度函数在空间联合球体内的三维积分问题<sup>[5]</sup>，在线性相对运动的假设下，可以证明两目标距离最接近时刻的相对位置矢量垂直于相对速度矢量。通过定义相遇平面，将两目标的几何形状及位置误差椭球投影到这个平面，碰撞概率的计算就转化为相遇平面内二维不等方差正态分布概率密度函数在圆域内的积分问题，该积分有很多种计算方法<sup>[6-8]</sup>。Patera<sup>[6]</sup>还利用坐标旋转和极坐标转换等方法将这个二维积分转化为一维曲线积分，不仅可以提高计算效率，也可用来计算不规则形状飞行器之间的碰撞概率。

碰撞概率计算现已逐步应用到工程实践当中，在航天器的发射和在轨预警工作中都起到了重要作用，并在应用中得到了验证。目前的碰撞预警工作都是基于线性相对运动假设前提下的碰撞概率的计算，当然由于空间目标运动的特性，这种线性方法对大部分情况都是适用的。但是在一些情况下，如果两目标间的相对速度较小，联合球体将在误差椭球内停留较长时间，此时线性相对运动的条件不再成立，需要在非线性相对运动情况下来研究碰撞概率的计算问题。例如，卫星编队伴飞过程中，主星与伴星之间处于椭圆相对运动状态；在轨道平面比较接近的圆轨道运行的两个飞行器，它们之间的相对运动速度很低，处于复杂的非线性相对运动状态。

国外也有人非线性碰撞概率的计算做了研究：Patera<sup>[9]</sup>通过变换将相对位置误差的协方差阵转成在三维空间中对称的形式，这时平行于相对速度的一维就可以和其他两维相互解耦，然后得到某一小段时间内的碰撞概率分量，在整个时间间隔内对其积分就可以得到非线性碰撞概率值；McKinley<sup>[10]</sup>通过建立积分坐标系，在此坐标系中积分得到碰撞概率，但按照此方法却得不到相应的结果，通过公式的推导发现了McKinley<sup>[10]</sup>中公式的几处错误。为了确保我国碰撞预警工作的完善，讨论非线性相对运动下碰撞概率的计算和研究是极为必要的。本文正是基于上述思想，通过对McKinley方法的重新整理和验证得到了正确可行的计算方法，并开发了相应的非线性碰撞概率计算软件。分析了数值计算中积分步长的选取对计算结果的影响，最后通过线性方法与非线性方法结果的比较，讨论了在一些特殊情况下非线性方法的必要性。

## 2 非线性碰撞概率的计算方法

根据统计定轨的方法和误差传播理论，空间目标在某一时刻的位置误差可以用三维高斯分布来描述，如果两个目标的误差分布不相关，那么它们之间的相对位置误差等于二者位置误差之和，形成联合误差椭球（以 $3\sigma$ 为准则）；同时两个目标的几何大小用等效半径来描述，相加得到联合球体。如果以误差椭球中心为不动的原点，那么联合球体在一定时间内将按照相对运动速度扫过一定的体积。碰撞概率实际上就等于联合位置误差概率密度函数在这个空间区域的积分：

$$P = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 |C|}} \int \int \int_V \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\vec{\rho}(t) - \vec{\rho}_0)^T C^{-1}(\vec{\rho}(t) - \vec{\rho}_0)]\right\} dx dy dz, \quad (1)$$

其中,  $C$  表示相对位置误差协方差矩阵,  $\vec{\rho} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$  表示相对位置矢量, 下标“0”表示最近相遇时刻,  $t$  表示时间,  $V$  表示积分体积.

在一般情况下, 由于两目标间的相对运动速度较大, 联合球体将迅速穿过误差椭球, 二者之间的运动可以近似为线性运动, 那么包围球体在某段时间内扫过的区域是一个直柱体, 如图 1(a). 在线性相对运动情况下, 可以证明距离最接近时刻发生在与相对速度矢量方向垂直的平面内, 可以只考虑交会这一时刻的状态, 将联合误差椭球和联合球体都投影到垂直于相对速度矢量的相遇平面内, 碰撞概率的计算就由三维积分转化为二维:

$$P = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 |C_*|}} \int \int_S \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\vec{\rho}_*(t) - \vec{\rho}_{0*})^T C_*^{-1} (\vec{\rho}_*(t) - \vec{\rho}_{0*})]\right\} dx dy, \quad (2)$$

其中, 下标“\*”表示相遇坐标系中的各量,  $C_*$  为投影到相遇平面内的二维协方差矩阵,  $S$  为投影的截面积. 显然在线性情况下, 二维积分简化了计算, 大大提高了运算速度.

但是, 在一些情况下, 如果两目标间的相对速度较小, 联合球体将在误差椭球内停留较长一段时间, 线性相对运动的假设不再成立, 联合球体在这段时间内扫过的是一个曲柱体, 如图 1(b). 此时碰撞概率变为随时间变化的函数, 因此两目标的碰撞概率等于碰撞概率分量在这段时间内的累加. 很明显, 图 1(a) 是图 1(b) 的一个特殊情况, 即非线性碰撞概率计算方法对线性相对运动同样适用.

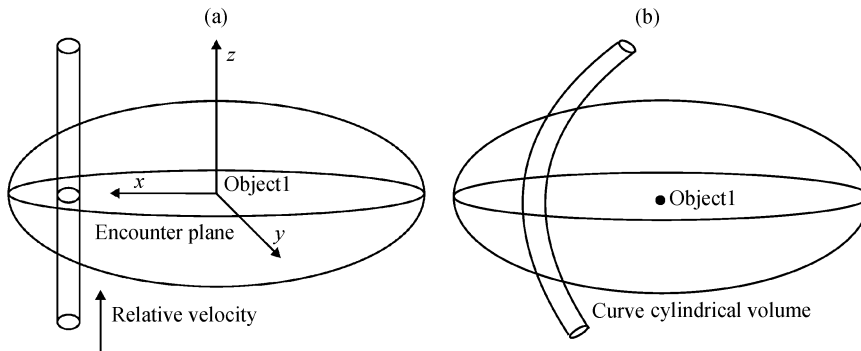


图 1 线性 (a) 和非线性 (b) 相对运动的几何交会

Fig. 1 Encounters of linear relative motion (a) and nonlinear relative motion (b)

考虑在整个碰撞时间间隔内联合球体扫过一段曲柱, 我们把这个曲柱分割成若干小部分, 对其中任意一小部分, 如果时间间隔足够小, 可以把其运动近似看作线性的, 那么总碰撞概率就等于误差概率密度函数在每一段小直柱内积分的总和.

为了方便计算, 定义一个积分坐标系  $\{\vec{V}, \vec{N}, \vec{B}\}$ , 如图 2. 此坐标系的原点位于物体 1,  $\vec{V}$  方向定义为相邻时刻两物体之间相对位置矢量变化的方向,  $\vec{N}$  方向为相邻时刻两目标相对位置矢量方向构成平面的法线方向,  $\vec{B}$  方向使其构成右手系. 由图 3 可以看出, 两个相邻的小直柱体之间存在空隙或者重叠, 这样会造成重叠处积分两次而空隙处却没

有积分. 实际上可以证明重叠体积与空隙体积大致相等<sup>[9]</sup>, 这样当联合球体半径远小于误差椭圆大小时引起的误差可以忽略不计. 于是通过引进方向角  $\theta_1$  和  $\theta_2$  来重新定义小直柱体, 在积分过程中便可以消除重叠和空隙体积的影响, 相邻直柱体之间的相对关系共有 4 种, 如图 4, 在数值计算中需要加以判断, 这样就可以在新定义的坐标系中针对非线性相对运动情况进行碰撞概率的计算.

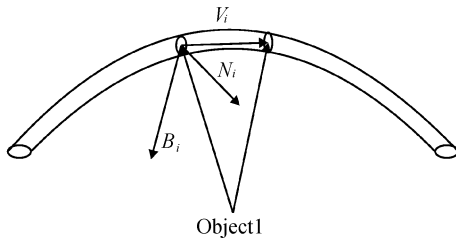


图 2 积分坐标系的定义  
Fig. 2 Definition of integration frame

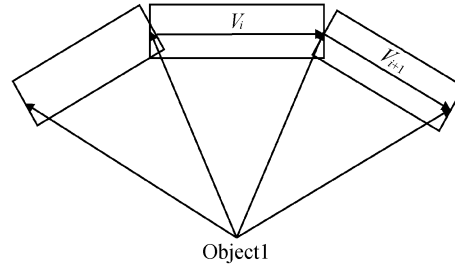


图 3 相邻直柱体之间的空隙与重叠  
Fig. 3 Gaps and overlaps of cylindrical segments

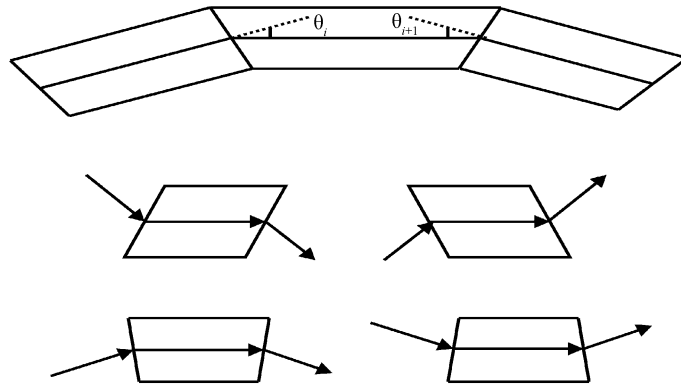


图 4 相邻直柱体之间的方向关系  
Fig. 4 Direction relation of adjacent segments

对于任意一个小柱体, 已知  $i$  时刻在 J2000.0 坐标系下两目标的位置矢量  $\vec{r}_{1_i}$ 、 $\vec{r}_{2_i}$  与位置协方差  $C_{1_i}$ 、 $C_{2_i}$ , 以及  $i+1$  时刻和  $i+2$  时刻的上述各量, 设从惯性系到积分坐标系的转化矩阵为  $M$ , 那么可将两目标的相对位置矢量及相对位置误差的协方差矩阵转换到积分坐标系中

$$\vec{\rho}_{i_{\text{INT}}} = M \vec{\rho}_i = M(\vec{r}_{2_i} - \vec{r}_{1_i}), \quad (3)$$

$$C_{i_{\text{INT}}} = M(C_{1_i} + C_{2_i})M^T, \quad (4)$$

其中, 下标 “INT” 表示积分坐标系中的各量, 转化矩阵  $M$  可以由  $i$ 、 $i+1$  及  $i+2$  时刻

的相对位置矢量得到:

$$\vec{\rho}_{i+2} = \vec{r}_{2_{i+2}} - \vec{r}_{1_{i+2}}, \quad (5)$$

$$\vec{\rho}_{i+1} = \vec{r}_{2_{i+1}} - \vec{r}_{1_{i+1}}, \quad (6)$$

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_{2_i} - \vec{r}_{1_i}, \quad (7)$$

$$\vec{V}_i = (\vec{\rho}_{i+1} - \vec{\rho}_i) / \|\vec{\rho}_{i+1} - \vec{\rho}_i\|, \quad (8)$$

$$\vec{V}_{i+1} = (\vec{\rho}_{i+2} - \vec{\rho}_{i+1}) / \|\vec{\rho}_{i+2} - \vec{\rho}_{i+1}\|, \quad (9)$$

$$\vec{N}_i = (\vec{\rho}_{i+1} \times \vec{\rho}_i) / \|\vec{\rho}_{i+1} \times \vec{\rho}_i\|, \quad (10)$$

$$\vec{B}_i = \vec{V}_i \times \vec{N}_i, \quad (11)$$

$$M = \begin{bmatrix} V_{x_i} & V_{y_i} & V_{z_i} \\ N_{x_i} & N_{y_i} & N_{z_i} \\ B_{x_i} & B_{y_i} & B_{z_i} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

这里需要注意的是文献 [10] 中 (3)~(5) 式符号有错误, 在这里表示为 (5)~(7) 式.

因而可以得到每一小部分的碰撞概率分量, 这里积分的上、下限可以由联合球体半径、相对位置矢量以及方向角  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  来确定.

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 |C_{i_{\text{INT}}}|}} \int \int \int_{v_i} e^{-\frac{1}{2} \vec{\rho}^T C_{i_{\text{INT}}}^{-1} \vec{\rho}} d v d n d b, \quad (13)$$

$$\vec{\rho} = \begin{Bmatrix} v - v_i \\ n - n_i \\ b - b_i \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

碰撞概率等于每一小部分得到的碰撞概率分量的累加:

$$P_N = \sum_i P_i. \quad (15)$$

在具体的编程实现中, 还需要注意的是积分步数及时间间隔的选取与两目标间的相对运动状态有关, 一般计算到碰撞概率不再增加为止. 另外, 如果相对运动是高度非线性的, 联合球体可能在一段时间内扫过相同一块区域, 在数值积分过程中需要加以扣除, 这种情况需要进一步考虑. 但是上述方法对大部分非线性问题都是适用的.

### 3 方法验证

为了验证该方法的正确性, 设计相对运动轨迹为环形的算例进行验证, 如图 5. 对于这样的环形相对运动轨迹, 可以得到碰撞概率真实解的表达式 [9]:

$$P_{\text{true}} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-\frac{(R^2 + D^2)}{2\sigma^2}\right] \int_0^D \sinh\left(\frac{R\sqrt{D^2 - x^2}}{\sigma^2}\right) dx, \quad (16)$$

其中  $D$  表示联合球体半径,  $R$  为环形相对运动轨迹的分离距离,  $\sigma$  代表联合位置均方差大小. 利用上述非线性方法, 取  $R = 1 \text{ km}$ ,  $\sigma = 1 \text{ km}$ , 积分时步长取  $1^\circ$ , 积分 1 周, 得到的结果如图 6 所示: 利用真实解表达式和非线性方法得到的碰撞概率值 (左纵轴) 几乎重合, 并且随着  $D/\sigma$  的增大而逐渐增大, 同时二者之间的相对误差百分比 (右纵轴) 也在增大, 但总体都在千分之一的量级, 这证明我们的非线性计算方法是十分精确有效的.

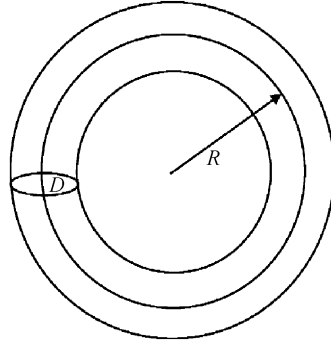


图 5 环形相对运动轨迹

Fig. 5 Toroidal relative motion trajectory

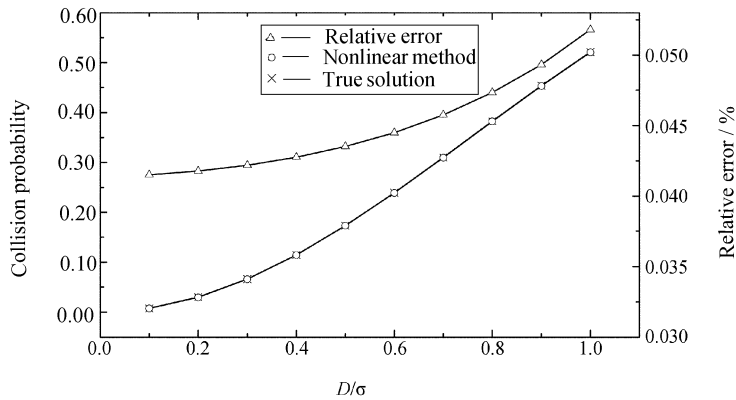


图 6 环形相对运动情况下的碰撞概率及误差

Fig. 6 Collision probability and error for toroidal relative motion

数值计算过程中积分步长的选取也是重要的, 它将影响计算的速度和精度: 步长过大, 精度得不到保证; 但也不能过小, 这样将极大降低计算效率, 因此选取的依据是在精度和速度上达到平衡. 如图 7 表示非线性碰撞概率结果及其相对误差随积分步长的变化情况: 图 (a) 取  $D/\sigma = 0.3$ , 首先利用真实解表达式得到的概率值为 0.066 137, 然后利用非线性方法计算, 积分步长由  $1^\circ$  变化到  $60^\circ$ . 当积分步长取为  $1^\circ$  时, 非线性方法得到的结果为 0.066 172, 相对误差仅为 0.042%, 当步长取为  $5^\circ$  时, 相对误差变大但不超过 1%. 由于相对误差大小与  $D/\sigma$  的比值也有关, 图 (b) 取  $D/\sigma = 1.0$ , 利用真实解表达式得到的

概率值为 0.521 154, 当积分步长取为  $1^\circ$  时, 非线性方法得到的结果为 0.521 424, 相对误差变为 0.052%, 同样取  $5^\circ$  时仍旧不超过 1%. 由此可见, 在此相对运动状态下运用非线性方法时的积分步长无需太小,  $5^\circ$  便可以满足相应的精度需要.

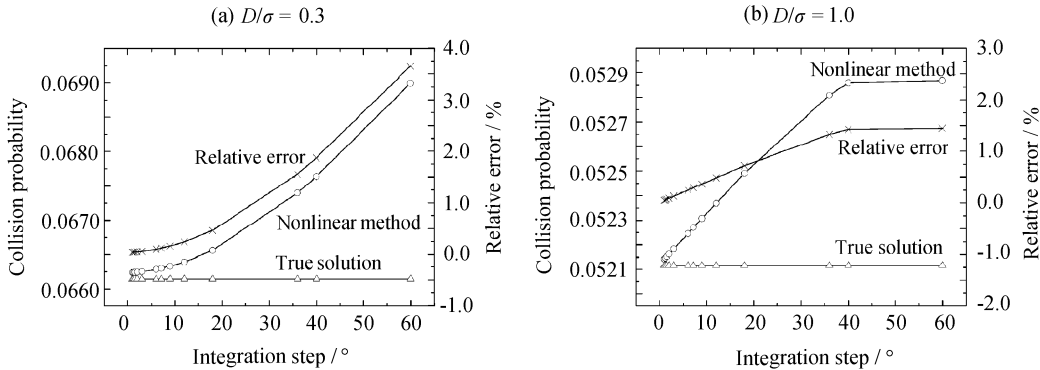


图 7 碰撞概率及相对误差随积分步长的变化. (a)  $D/\sigma = 0.3$  (b)  $D/\sigma = 1.0$

Fig. 7 Relations between collision probability or relative error and integration step.

(a)  $D/\sigma = 0.3$  (b)  $D/\sigma = 1.0$

我们知道线性相对运动在某种意义上可以看做非线性相对运动的一种特殊情况, 因此可以通过具体的碰撞事件对非线性方法进行验证. 2005 年 1 月 17 日, 中美空间碎片在 885 km 的高空发生碰撞, 通过轨道计算得到 02:14:37.00UTC 时刻两目标的位置和速度矢量见表 1<sup>1</sup>.

表 1 中美空间碎片状态矢量

Table 1 State vectors of China and U.S. debris

Object	X(km)	Y(km)	Z(km)	$V_x$ (km/s)	$V_y$ (km/s)	$V_z$ (km/s)
American 07219	-150.798437	1182.676987	-7143.775564	7.290071	-1.126282	-0.354014
China 26207	-150.619960	1182.018386	-7143.787995	5.915107	4.347936	0.643388

假设两碎片组成的联合球体半径为 10 m, 位置误差分布为  $\sigma_{u1} = \sigma_{u2} = \sigma_u = 0.265$  km,  $\sigma_{n1} = \sigma_{n2} = \sigma_n = 0.053$  km,  $\sigma_{w1} = \sigma_{w2} = \sigma_w = 0.053$  km. 在线性相对运动的情况下, 首先利用相遇平面内的二维方法进行碰撞概率的计算, 得到结果为  $6.88800 \times 10^{-4}$ . 然后运用上述非线性方法进行计算, 结果如图 8, 随着积分时间的增大, 联合球体开始进入误差椭圆, 非线性方法得到的碰撞概率值由零开始增大, 最终当联合球体离开误差椭圆时, 碰撞概率值不再增加, 结果为  $6.88801 \times 10^{-4}$ , 和二维结果吻合. 这说明非线性方法对线性相对运动是兼容的, 同时也证明我们的非线性碰撞概率的计算方法是有效的.

<sup>1</sup> <http://celestrak.com/SOCRATS/>

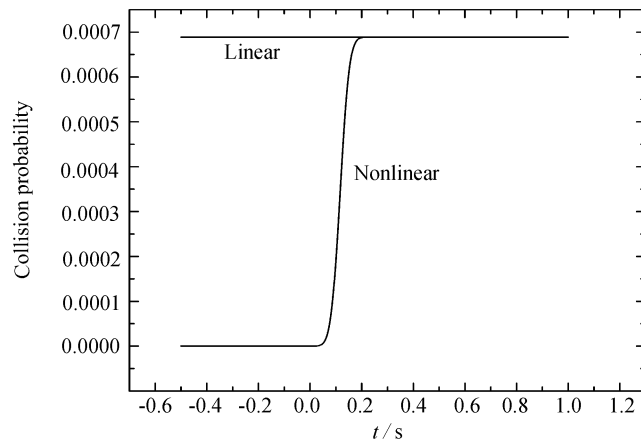


图 8 线性相对运动情况下的碰撞概率

Fig. 8 Collision probability for linear relative motion

#### 4 非线性相对运动分析

目前, 碰撞概率计算的应用都是建立在线性相对运动条件基础上的, 这对大部分情况是可以满足需要的, 而且效率较高. 但是在两目标间的相对速度比较小的情况下就不再满足要求. 我们通过对线性与非线性两种方法得到的碰撞概率的相对误差大小  $\frac{|P_N - P_L|}{P_N}$  ( $P_N$  表示非线性结果、 $P_L$  表示线性结果) 分析何种情况下应该使用非线性方法进行碰撞概率的计算.

首先我们考虑椭圆相对运动轨迹下两个目标间的碰撞概率计算. 作为一对双星 (一颗为中心星, 一颗为伴星), 它们各自遵循着绕地球运动的规律, 总体上可以保持一定的空间构形. 为了研究其之间的相对运动状态, 将各自绕地球的运动转化为伴星相对中心卫星的运动. 建立相对运动坐标系, 其坐标原点为中心星,  $xy$  坐标面即中心星绕地球运行的轨道平面,  $x$  轴方向即中心卫星的径向. 在此坐标系中, 当中心星的轨道为圆轨道时, 可获得伴星相对中心星的归一化运动方程<sup>[11]</sup>:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = 3x \\ \ddot{y} - 2\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} + z = 0 \end{cases}, \quad (17)$$

此方程即为 C-W 方程. 我们只考虑  $xy$  平面的运动, 在一定的约束条件下该方程具有椭圆周期解:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y - y_c)^2}{4b^2} = 1. \quad (18)$$

在这种条件下相对运动轨迹为椭圆, 其长轴是短轴的 2 倍. 我们设计这样一个算例, 如图 9, 中心星在轨道高度为 500 km 的圆轨道上运行, 在相对坐标系中, 伴星的初始位置矢量为  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  km, 在径向方向对伴星施加脉冲增量  $\Delta v = (\Delta v_x, 0)$ , 此时椭圆相对运动轨迹的短轴长度  $b = \Delta v_x/n$ , 其中  $n = 1.1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  为中心星的轨道角频率. 由此可见施加的速度增量越大, 椭圆的半长径也越大. 取  $D = 0.05 \text{ km}$ ,  $\sigma = 0.5 \text{ km}$ . 采用线性相对运动方法计算得到两物体之间的碰撞概率为  $9.19605 \times 10^{-4}$ , 与椭圆相对运动轨迹半长径大小以及速度增量  $\Delta v_x$  无关; 然而采用非线性相对运动方法得到的碰撞概率却与其有关, 积分步长取  $0.5^\circ$ , 图 10 表示非线性碰撞概率随半长径  $2b$  和速度增量  $\Delta v_x$  的变化情况.

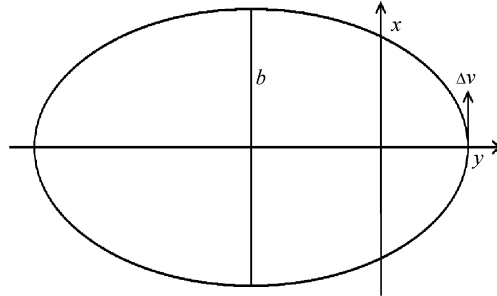


图 9 相对坐标系下的椭圆相对运动情况

Fig. 9 Elliptical trajectory in relative frame

可见在椭圆相对运动状态下, 非线性碰撞概率值随着两目标间的相对速度增大而减小, 并逐渐接近线性情况下的碰撞概率. 如图 11, 它们之间的相对误差随着相对速度的增大而减小. 当速度增量在 10 m/s 以下时, 二者之间的相对误差达到 18% 以上; 当速度增量大于 25 m/s 时, 相对误差降到 10% 以下; 而当增量速度大于 100 m/s 时, 相对误差才降到 5% 以下.

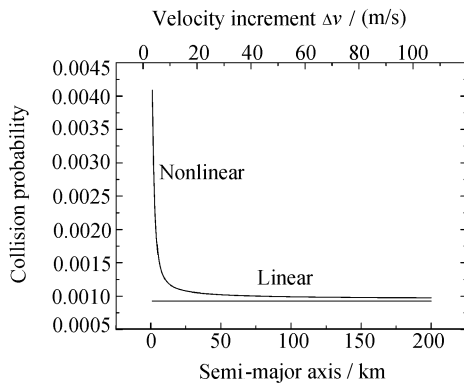


图 10 非线性碰撞概率随半长径和速度增量的变化情况

Fig. 10 Relations between nonlinear collision probability and velocity increment or semi-major axis

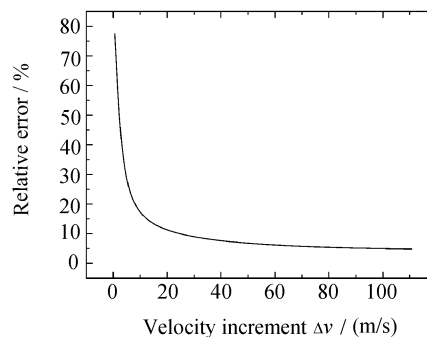


图 11 相对误差随速度增量的变化情况

Fig. 11 Relation between relative error and velocity increment

下面我们考虑两个做简单圆轨道运动的目标间的碰撞概率计算问题. 设它们在最近相遇时刻的轨道根数如下, 见表 2.

表 2 圆轨道运动的两目标的轨道根数

Table 2 Orbital elements of two objects with circular orbit

Element	$a(\text{km})$	$e$	$i(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\omega(^{\circ})$	$M(^{\circ})$
$\sigma_1$	6878.140	0.0	45.0	0.0	0.0	0.0
$\sigma_2$	6879.140	0.0	-	0.0	0.0	0.0

如表 2 两目标间的交会距离为 1 km, 取联合球体半径为 10 m, 假定二者的联合位置误差分布为球形分布, 并取  $\sigma^2 = 0.5 \text{ km}^2$ . 我们可以通过改变两目标轨道面间的夹角来改变相对运动速度的大小, 显然夹角越大相对速度也越大. 分别针对线性相对运动与非线性相对运动两种情况进行计算, 非线性方法的积分步长取 0.1 s, 结果如表 3.

表 3 不同相对速度大小下线性结果与非线性结果的比较

Table 3 Comparison of linear and nonlinear methods for different relative velocities

$\Delta i(^{\circ})$	Relative velocity(m/s)	Nonlinear	Linear	Relative error(%)
45	5826.225	$3.68028 \times 10^{-5}$	$3.68028 \times 10^{-5}$	0.00000
1	132.860	$3.68002 \times 10^{-5}$	$3.68028 \times 10^{-5}$	0.00694
0.1	13.298	$3.65506 \times 10^{-5}$	$3.68028 \times 10^{-5}$	0.68995
0.075	9.980	$3.63588 \times 10^{-5}$	$3.68028 \times 10^{-5}$	1.22108
0.01	1.439	$2.66961 \times 10^{-5}$	$3.68028 \times 10^{-5}$	37.85800
0.0	0.553	$1.96822 \times 10^{-5}$	$3.68028 \times 10^{-5}$	86.98508

如图 12, 横坐标表示积分时间, 在 4 个不同夹角下非线性碰撞概率先迅速增大最后收敛到一定值, 并且随着轨道面间夹角的减小 (相对速度的减小), 线性与非线性结果之间的相对误差逐渐增大. 当轨道面间夹角在  $0.075^{\circ}$  (相对速度约为 10 m/s) 以下时, 线性相对运动与非线性相对运动得到的结果表现出明显的差异,  $\Delta i = 0.01^{\circ}$  时二者之间的相对误差已达到 38%. 我们还知道两目标间的相对速度大小将影响交会时间的长短, 显然相对速度越大, 联合球体将迅速穿过误差椭球则交会时间越短; 相反, 联合球体将在误差椭球内停留较长一段时间则交会时间越长, 由图 12 可见: 当相对速度为 13 m/s 时, 只需积分几百秒碰撞概率就不再增加, 而当相对速度为 0.5 m/s 时, 停留时间已增加到几个小时.

由于最近时刻的相对距离影响交会时间的长短, 故需要通过改变相对距离  $d$  来分析其对非线性碰撞概率及线性与非线性间相对误差的影响. 如图 13, 相对距离从 100 m 增大到 1 km 的过程中, 线性与非线性碰撞概率值都逐渐减小, 在图左端非线性概率值大于线性结果, 而当相对距离大于 300 多米时则相反. 二者之间的相对误差大小变化情况如图 14 所示: 当  $\Delta i = 0.1^{\circ}$  时, 随着相对距离的增大, 线性与非线性结果之间的相对误差随之增大, 但都在 1% 以下, 这时可以认为采用两种方法得到的结果基本一致; 当  $\Delta i = 0.01^{\circ}$  时, 随着相对距离的增大, 相对误差先减小后增大.  $d = 100 \text{ m}$  时相对误差达到 76%,  $d = 500 \text{ m}$  时相对误差接近 3%,  $d = 1 \text{ km}$  时相对误差又增大为 38%; 当  $\Delta i = 0.0^{\circ}$  时, 随着相对距离的增大, 相对误差的变化规律与  $\Delta i = 0.01^{\circ}$  时类似.  $d = 100 \text{ m}$  时相对误差达到 74%,  $d = 500 \text{ m}$  时相对误差超过 3%,  $d = 1 \text{ km}$  时相对误差又增大为 87%.

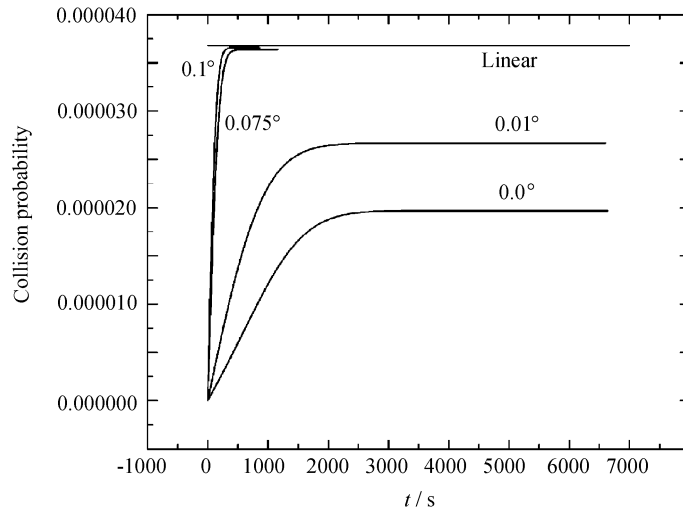


图 12 不同轨道面夹角下非线性概率值随积分时间的变化

Fig. 12 Relation between nonlinear collision probability and integration time for different angles

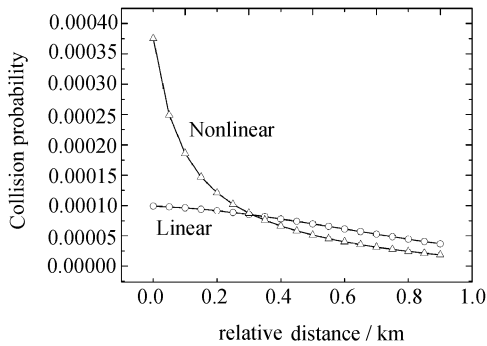


图 13 碰撞概率随最近时刻相对距离的变化情况  
Fig. 13 Relation between collision probability and relative distance at closest approach time

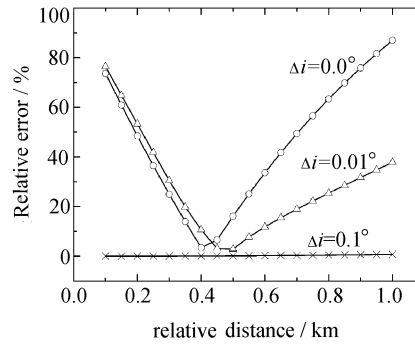


图 14 相对误差随最近时刻相对距离的变化情况  
Fig. 14 Relation between relative error and relative distance at closest approach time

最后固定相对距离与轨道面夹角，改变位置误差大小，分析它对非线性碰撞概率的影响。在相对距离为 1 km、轨道面间夹角为 0.01° 时，如图 15：与线性相对运动下碰撞概率的规律一致，随着位置误差的增大，非线性碰撞概率先增大后减小，在某处取得最大值，对应着最大碰撞概率，并且线性与非线性两种情况在同一处取得最大值。这说明非线性情况下的碰撞概率同样存在着概率衰减门限<sup>[12]</sup>的问题，当位置误差超过门限值时，非线性碰撞概率值的降低容易造成虚假的判断。

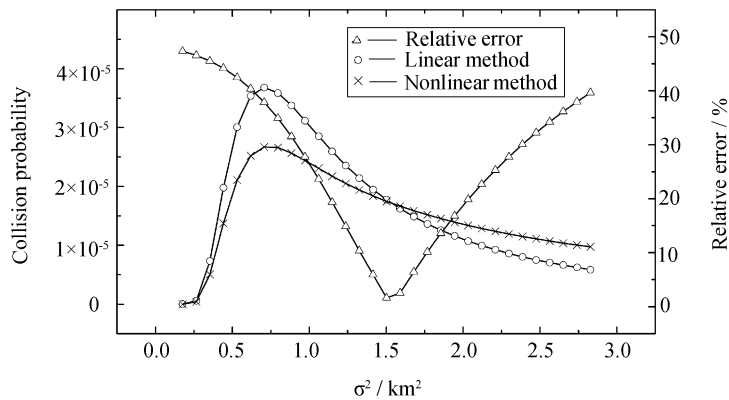


图 15 碰撞概率及相对误差随位置误差大小的变化情况

Fig. 15 Relations between collision probability or relative error and combined covariance

通过以上的分析表明线性与非线性碰撞概率之间的相对误差大小可由两目标间的相对速度大小、最接近时刻的相对距离以及联合位置协方差共同决定。在卫星编队飞行过程中，两目标处于同一平面的绕飞相对运动状态，当二者之间的相对速度在 100 m/s 以下时，利用线性和非线性方法得到的碰撞概率之间的相对误差可达 5% 以上；而在作圆轨道运动的两个物体的接近分析中，当二者之间的相对速度在 10 m/s 以下时，其相对误差也超过 1%。在这些情况下就需要考虑利用非线性方法进行碰撞概率的计算。

## 5 结论

针对非线性运动情况，重新整理得到了碰撞概率计算的方法，并通过算例验证了该方法的正确性。基于所得到的非线性碰撞概率计算软件，分析了非线性方法计算的必要性，结果表明，在大部分情况下，线性相对运动的假设是成立的，即在实际碰撞预警工作中是满足要求的；但在少数情况下，非线性相对运动下碰撞概率的计算是必要的。对于飞行器编队绕飞中的椭圆相对运动状态，满足相对运动构形所需要的速度增量在 10 m/s 以下时，二者之间的相对误差达 18% 以上，速度增量在 100 m/s 以下时，相对误差仍超过 5%；对于处于非常接近的两个圆轨道运行的目标（如星座轨道成员或者地球同步卫星），当相对运动速度为 0.1 m/s 的量级时，线性碰撞概率与非线性碰撞概率之间的相对误差达到 80% 以上；相对速度在 10 m/s 以下时，二者之间的相对误差也可超过 1%。这时线性运动的假设不再满足要求，需要进行非线性相对运动情况下碰撞概率的计算。同时，非线性碰撞概率也存在着最大碰撞概率值，为避免作出虚假的判断，在预警过程中同样需要考虑。

## 参 考 文 献

- [1] Liou J C. *Orbital Debris Quarterly News*, 2008, 12: 12
- [2] Klinkrad H. *ESA SP*, 1997, 393: 601
- [3] Klinkrad H, Alarcon J R, Sanchez N. *ESA SP*, 2005, 587: 509
- [4] 郑勤余, 吴连大. *天文学报*, 2004, 45: 422
- [5] Akella M R, Alfriend K T. *JGCD*, 2000, 23: 769
- [6] Patera R P. *JGCD*, 2001, 24: 716
- [7] Chan K. *JAnSc*, 1997, 96: 1033
- [8] 白显宗, 陈磊. *宇航学报*, 2008, 29: 1435
- [9] Patera R P. *JGCD*, 2003, 26: 728
- [10] McKinley D P. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 2006
- [11] 刘林, 胡松杰, 王歆. *航天动力学引论*. 南京: 南京大学出版社, 2005: 199-200
- [12] Alfano S. *JAnSc*, 2003, 116: 757

# A Research on Collision Probability Calculation of Space Debris for Nonlinear Relative Motion

XU Xiao-li<sup>1,2</sup> XIONG Yong-qing<sup>1</sup>

(1 *Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008*)

(2 *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049*)

**ABSTRACT** The calculation of collision probability is the foundation of collision detection and avoidance maneuver for space objects. Now an assumption of linear relative motion is usually applied in the calculation of collision probability and then the complex 3-dimensional problem can be reduced to a 2-dimensional integral of probability density function over the area of circle. However, if the relative velocity value is very small, the term of linear relative motion is not valid. So it is necessary to consider the calculation of collision probability for nonlinear relative motion. The method used to calculate collision probability for nonlinear relative motion is studied, and test cases are designed to prove the validity of this method. It is applicable to collision probability problems involving relative velocity and error covariance varying with time. The results indicate that it is necessary to calculate collision probability with this nonlinear method under certain circumstances. For example, for elliptical relative motions in Satellite Formation Flying, when the relative velocity is below 100 m/s, the relative error between the linear method and the nonlinear method exceeds 5%; for the problem of conjunction analysis of two satellites with circular orbit, when the relative velocity is below 10 m/s, the relative error is also larger than 1%. Some significant conclusions are obtained for collision detection system of our country.

**Key words** space vehicles, methods: analytical