

《授时历》五星推步的精度研究*

李 勇[†]

(中国科学院国家天文台 北京 100012)

摘要 着重考察了《授时历》的步五星术,考校、复原了其推步方法。(1)推步了 1299 年木星历,并与已有研究进行比对,从而确认恢复方法的正确性。(2)得出《授时历》在 1280~1650 年间推步五星黄经的精度,木星、火星、土星、金星和水星的误差的绝对值平均分别为 0.49° 、 1.91° 、 0.70° 、 2.82° 和 5.01° ,木星、土星的精度较高。(3)指出将现代天文方法获取的《授时历》五星参数(周率、历率、度率、合应及历应)精确值代入《授时历》推步模型,木星、土星的推步精度并未提高,误差分别为 1.83° 和 1.21° ,而水星、金星和火星的误差却大幅加大,结果分别为 30.04° 、 54.86° 和 10.82° 。说明某些重要参数的修正并不能改善推步结果。

关键词 天文学史和哲学, 历书, 行星与卫星; 个别: 木星, 火星, 土星, 金星, 水星

中图分类号: P 135; **文献标识码:** A

1 引言

《授时历》载于《元史·历志》,由郭守敬等编制,历成于 1280 年,行用于 1281~1644 年。它是中国古代历法的集大成者,也是由中国学者独立完成的最后一部名历。《元史》有“郭守敬传”^[1]。郭守敬巧思过人,长于水利、天文。他在天文观测、仪器制造和历法编制等方面成就卓著,达到了历史和当时世界的顶峰水平。

历法的核心为推步术,其准确与否直接标志着历法之优劣程度。《授时历》也不例外,它所设计的历法系统更加严密科学,并外传行用。《授时历》编成以来研究未断,明末邢云路的《古今律历考》七十二卷^[2],详陈历代历法得失;清初黄宗羲的《授时历故》,惜止于月离之术^[3];另清初梅文鼎一生研究历法、数术,有关《授时》、《大统》的论著众多。当代对历法系统研究有王应伟^[4]、陈美东^[5]、张培瑜等^[6]、曲安京^[7-8]等。外国学者的研究则有山田庆儿^[9]、Sivin^[10]、藪内清等^[11]。张培瑜等^[6]所论深入而具体,覆盖现代历算和古代历法的相关内容,算例丰富。曲安京^[7-8]对历法的主要部分均作了详细剖析,比较并研究了不同时期历法的算法演变、造术原理和数学构成。这些工作都为研究者提供了较大帮助。

《授时历》再次明确了古代历法的 7 个主要部分:步气朔、步发敛、步日躔、步月离、步中星、步交会、步五星。我们曾考察过其中的气朔^[12]、发敛^[13]、日躔和月离^[14]

2010-04-26 收到原稿, 2010-06-07 收到修改稿

* 国家自然科学基金项目 (10973022) 资助

[†] yli@bao.ac.cn

以及交会^[15]5个部分的主要内容,总觉未尽其详.步五星是中国历代历法推步术的基本内容之一,通常列于最后.本文拟对其推步方法和精度等问题作进一步考察和评估,通过计算比较其与现代五星运动理论的差异,这就需要考察其采用观测数据的精度及计算模型(公式)的精度.我们的后续工作则在借鉴并吸纳已有研究的基础上,最终试图将整个《授时历》的推步术整合在一起,“通解”《授时历》,并实现程序化和自动化.

所幸近些年来,对中国古代历法的研究又有了较大的进展,成果、力作不断涌现,其中有关《授时历》特别是五星推步的工作,使本文获益不少.

2 数据

2.1 《授时历》基本观测数据

七应是《授时历》最基本的7组观测数据,采用七应推步也是《授时历》弃上元积年的重要创新.七应的意义分别为:

(1) 气应 = 55.0600 d, 表示历元冬至(即1280年冬至)距甲子日的积日,即冬至干支.

《授时历》实测得至元辛巳(1281年)岁前冬至为己未日子正夜半后6刻,距甲子日子正夜半为55.0600 d.

(2) 闰应 = 20.2050 d, 为历元冬至距该月平朔的积日,即冬至月龄.经文中原为20.1850,至元三十一年(1294年)改定为20.2050.

(3) 转应 = 13.0205 d, 为历元冬至距近点月首(近地点)的积日,即冬至的近点月月龄.经文中原为13.1904,至元三十一年改定为13.0205.

(4) 交应 = 26.0388 d, 为历元冬至距交点月首(降交点)的积日.经文中原为26.018786,至元三十一年改定为26.0388.

(5) 周应 = 315.1075 d, 为历元冬至加时太阳的赤道宿度(箕 10°).《授时历》规定赤道宿度起算点为虚宿 6° ,虚 6° 至箕 10° 积315.1075°.同时,《授时历》还规定周天 = 365.2575°,将其化为现代的 360° 制时需要乘以 $360^\circ/365.2575^\circ=0.9856$.

另有合应和历应用于步五星计算,但不同的行星其值不同.

(6) 合应 = 历元冬至与其前该星平合(历元平合)之间的时距.

(7) 历应 = 行星自近日点走至历元平合所需的日分加上平合与历元冬至间的时距.

历应与合应配合,则可给出五星历元平合时的平近点角,又称历元平合的入历度,即: 历元平合入历度 = (历应 - 合应) / 度率, 其中度率 = 五星行天 1° 所需的日数,也为五星恒星周期(恒星年).

2.2 步五星基本数据

《授时历》步五星的经文见明宋濂所撰《元史·历志四》,表1为《授时历》给出的步五星最基本数据.其中,周率 = 五星的会合周期,历率 = 五星的恒星周期,历率 / 度率 = 历度(365.2575°),伏见 = 日星相距目视可见的最小角距.合应和历应的意义见2.1节.

表 1 《授时历》步五星的基本数据及现代修正值

Table 1 The fundamental data for planetary calculation in *Shoushi Li* and their modern corrections

		行星				
		木星	火星	土星	金星	水星
周率 (d)	授时值	398.88	779.9290	378.0916	583.9026	115.8760
	修正值	398.88	779.94	378.09	583.92	115.88
历率 (d)	授时值	4331.2964865	686.958043	10747.884566	365.2575	365.2575
	修正值	4332.589	686.98	10759.2	224.701	87.969
度率 (yr)	授时值	11.8582	1.88075	29.4255	1.0	1.0
	修正值	11.861739	1.880810	29.456479	0.615185	0.240841
合应 (d)	授时值	117.9726	56.7545	17.5643	571.6330	70.0437
	修正值	116.0707	73.5588	16.5380	201.2975	116.0707
历应 (d)	授时值	1899.9481	547.2938	5224.0561	11.9639	205.5161
	修正值	1954.5859	614.3310	5232.8447	150.7397	206.6952
伏见 (°)		13	19	18	10.5	16.5/19

注: 水星的伏见有两值, 前为晨伏夕见值, 后为夕伏晨见值. 授时值为《授时历》历经所载数据, 修正值为根据现代天文方法计算得出的数据.

按中国古代对行星运动的描述, 在一个会合周期内, 行星经历了伏、顺行、留、逆行、留、顺行、伏. 为推步五星位置, 《授时历》还构建了五星动态表, 定量给出各段所占用的时间和角度值, 含段目、段日 (d)、平度 (°)、限度 (°)、初行率 (°/d) 条目, 但五星具体的段数各异, 木星分 14 段, 火星 18 段, 土星 12 段, 金星 20 段, 水星 10 段 (见表 2).

在表 2 中, 段目指该段名称. 段日为行星处该段的平均时长. 平度是行星处该段的平均角度. 限度是用于计算行星所处诸段入历度及盈缩差时的参数. 初行率指行星处该段的初始速度.

动态表规定了五星处于各段目的初始时间和位置状态, 相当于平时间和平位置, 其精确值需由推步术计算获取.

3 推步方法概要

《授时历》的步五星部分首先列出所需推步常数, 随后给出 18 个推步术^[16]. 历算先从 1280 年冬至为起点推所求年冬至, 然后求平合, 借助五星动态表, 得诸段中积、中星, 再由盈缩差改正得到定位置. 考虑到张培瑜等^{[6]683-713}已对《授时历》的五星推步详加阐释, 本文仅将推步思路及算式简述如下:

(1) 求解各平诸段 (平合、见、伏等) 至所求年天正冬至点的平长度 — 中积、中星:

$$\text{前合} = \text{MOD}(\text{距算} \times \text{岁实} + \text{合应}, \text{周率}),$$

$$\text{后合} = \text{周率} - \text{前合} = \text{后合中积} = \text{后合中星},$$

其中前合指冬至距其前平合的日数, 后合为冬至距其后平合的日数, 两者单位均为 d. 距算 = 所求年 - 1281(yr), 岁实 = 回归年长 (d), 周率 = 会合周期 (d). 中积的单位为 d, 中星的单位是 $^{\circ}$. 各平诸段至所求年天正冬至点的平长度为中积, 单位为 d, 单位转换为 $^{\circ}$ 则为中星.

表 2 《授时历》五星动态表

Table 2 The movements of five-planet in *Shoushi Li* within a synodic period

行星	段目	段日 (d)	平度 ($^{\circ}$)	限度 ($^{\circ}$)	初行率 ($^{\circ}/d$)	行星	段目	段日 (d)	平度 ($^{\circ}$)	限度 ($^{\circ}$)	初行率 ($^{\circ}/d$)	
木	合伏	16.86	3.86	2.93	0.23	木	合伏	69	50	46.50	0.73	
	晨疾初	28	6.11	4.64	0.22		晨疾初	59	41.80	38.87	0.72	
	晨疾末	28	5.51	4.19	0.21		晨疾末	57	39.08	36.34	0.70	
	晨迟初	28	4.31	3.28	0.18		晨次疾初	53	34.16	31.77	0.67	
	晨迟末	28	1.91	1.45	0.12		晨次疾末	47	27.04	25.15	0.62	
	晨留	24					晨迟初	39	17.72	16.48	0.53	
	晨退	46.58	4.88125	0.32875			火 晨迟末	29	6.20	5.77	0.38	
	夕退	46.58	4.88125	0.32875	0.16		晨留	8				
	夕留	24					晨退	28.9645	8.65675	6.46325		
	夕迟初	28	1.91	1.45			夕退	28.9645	8.65675	6.46325	0.44	
	夕迟末	28	4.31	3.28	0.12		夕留	8				
	夕疾初	28	5.51	4.19	0.18		星 夕迟初	29	6.20	5.77		
	夕疾末	28	6.11	4.64	0.21		夕迟末	39	17.72	16.48	0.38	
	夕伏	16.86	3.86	2.93	0.22		夕次疾初	47	27.04	25.15	0.53	
土	合伏	20.40	2.40	1.49	0.12	夕次疾末	53	34.16	31.77	0.62		
	晨疾	31	3.40	2.11	0.11	夕疾初	57	39.08	36.34	0.67		
	晨次疾	29	2.75	1.71	0.10	夕疾末	59	41.80	38.87	0.70		
	晨迟	26	1.50	0.83	0.08	夕伏	69	50	46.50	0.72		
	晨留	30				星	合伏	39	49.50	47.64	1.275	
	晨退	52.6458	3.62545	0.28455			夕疾初	52	65.50	63.04	1.265	
	夕退	52.6458	3.62545	0.28455	0.10		夕疾末	49	61	58.71	1.255	
	夕留	30					夕次疾初	42	50.25	48.36	1.235	
	夕迟	26	1.50	0.83			夕次疾末	39	42.50	40.90	1.16	
	夕次疾	29	2.75	1.71	0.08		夕迟初	33	27	25.99	1.02	
	夕疾	31	3.40	2.11	0.10		金 夕迟末	16	4.25	4.09	0.62	
	夕伏	20.40	2.40	1.49	0.11		夕留	5				
	水	合伏	17.75	34.25	29.08		2.1558	夕退	10.9513	3.6987	1.5913	
		夕疾	15	21.38	18.16		1.7034	夕退伏	6	4.35	1.63	0.61
夕迟		12	10.12	8.59	1.1472		合退伏	6	4.35	1.63	0.82	
夕留		2					星 晨退	10.9513	3.6987	1.5913	0.61	
夕退伏		11.1880	7.8120	2.1080			晨留	5				
合退伏		11.1880	7.8120	2.1080	1.0346		晨迟初	16	4.25	4.09		
晨留		2				晨迟末	33	27	25.99	0.62		
晨迟		12	10.12	8.59		晨次疾初	39	42.50	40.90	1.02		
晨疾		15	21.38	18.16	1.1472	晨次疾末	42	50.25	48.36	1.16		
晨伏		17.75	34.25	29.08	1.7034	晨疾初	49	61	58.71	1.235		
						晨疾末	52	65.50	63.04	1.255		
						晨伏	39	49.50	47.64	1.265		

于是借助五星动态表(表 2) 可得:

$$\text{各段中积} = \text{后合中积} + \text{其前诸段段日之和},$$

$$\text{各段中星} = \text{后合中星} + \text{其前诸段平度之和}.$$

(2) 求解各平诸段(平合、见、伏等)入近日点(入历)的度数及盈缩差:

$$\text{各段入历} = \text{后合入历} + \text{其前诸段限度之和}.$$

其中后合入历 = MOD(距算 × 岁实 + 历应 + 后合, 历率) / 度率, 单位为 °, 但退段之平度取负值计算. 诸段段日、平度和限度数据均可由五星动态表(表 2) 查出.

然后, 由入历度可推出入盈历、入缩历数值及求盈缩差所需的初末限值, 再代入公式求解盈缩差:

$$\text{盈缩差} = [\text{定差} \pm (\text{平差} \pm \text{立差} \times \text{初末限}) \times \text{初末限}] \times \text{初末限}.$$

五星的平、立、定 3 差数值历经有载. 曲安京^{[7]51} 曾将《授时历》的数学成就归纳为 3 点: 其一为招差术 — 三次差内插(平、立、定 3 差); 其二为弧矢割圆术; 其三日月食三限和月食五限算法. 足见该算法之重要. 此外, 历经又称盈缩差还可通过五星盈缩立成内插得到. 但该立成表《授时历》未载, 见于《大统历》.

(3) 求解各平诸段(平合、见、伏等)至所求年天正冬至点的定长度 — 定积、定星:

$$\text{各段定积} = \text{各段中积} \pm \text{盈缩差},$$

$$\text{各段定星} = \text{各段中星} \pm \text{盈缩差},$$

$$\text{各段加时定星} = \text{各段定星} + \text{天正冬至加时黄道日度},$$

$$\text{诸段初日晨前夜半定星} = \text{加时定星} \pm \text{加减定分}.$$

其中, 加减定分 = 定日小余 × 其段初行率, 顺段为减分, 退段为加分. 故天正冬至加时赤道日度 = MOD(距算 × 岁实 + 周应, 周天) - 305.1575, 此刻入箕宿 0°, 随后再通过历经中的“黄赤道率”立成表中的相应参数求天正冬至加时黄道日度: 天正冬至加时黄道日度 = ((赤道日度 - 赤道积度) × 黄道率) / 赤道率 + 黄道积度.

(4) 求解各定诸段(定合、见、伏等)的泛积、定积、定星:

$$\text{定合泛积} = \text{平合定积} \pm k \times \text{盈缩差},$$

其中, 对木星、火星、土星, $k=0$; 对金星, $k=1$; 对水星, $k=2$.

$$\text{定合定积} = \text{定合泛积} \pm \text{距合差日},$$

$$\text{定合定星} = \text{定合泛积} \pm \text{距合差度},$$

其中,各定诸段的泛积由相应各平诸段的定积作盈缩差改正而得,如定合泛积 = 平合定积 $\pm k \times$ 盈缩差. 各平诸段的定积则由各段的中积作盈缩差改正而得,如平合定积 = 平合中积 \pm 盈缩差. 定合泛积作距合差日改正则得定合定积,作距合差度改正则得定合定星. 距合差日、距合差度是与行差和盈缩差有关的量.

总之,《授时历》五星推步的细节较为繁杂,至此本文只是给出一些基本的推步公式.

4 推步方法复原

首先基于五星推步术经文,我们复原了《授时历》五星推步方法. 随后,为考察本文恢复的推步方法的准确性,我们与张培瑜等^{[6]696-703}先期的推步结果作比对. 同样,取岁实 = 365.2425 d, 诸应值亦取至元三十一年(1294年)后采用的值,我们也计算1299年木星历,所得结果分列表3~4.

表 3 《授时历》推步 1299 年木星历表 (1)

Table 3 The ephemeris of Jupiter in 1299 calculated by Shoushi Li (1)

序 段目	中积 (d)	中星 (°)	入历 (°)	初末限 (°)	盈缩差 (°)	定积 (d)	定日 (d)	定星 (°)	加时定星 (°)
1 合伏	88.6224	88.6224	356.8534	-8.4041	-0.8961	87.7263	57.1513(辛酉)	87.7263	96.6981
2 晨疾初	105.4824	92.4824	359.7834	-5.4741	-0.5884	104.8940	14.3190(戊寅)	91.8940	100.8658
3 晨疾末	133.4824	98.5924	364.4234	-0.8341	-0.0907	133.3917	42.8167(丙午)	98.5017	107.4735
4 晨迟初	161.4824	104.1024	368.6134	3.3559	0.3627	161.8451	11.2701(乙亥)	104.4651	113.4369
5 晨迟末	189.4824	108.4124	371.8934	6.6359	0.7110	190.1934	39.6184(癸卯)	109.1234	118.0952
6 晨留	217.4824	110.3224	373.3434	8.0859	0.8629	218.3453	7.7703(辛未)	111.1853	120.1571
7 晨退	241.4824	110.3224	373.3434	8.0859	0.8629	242.3453	31.7703(乙未)	111.1853	120.1571
8 夕退	288.0624	105.4412	373.6722	8.4147	0.8972	288.9596	18.3846(壬午)	106.3383	115.3101
9 夕留	334.6424	100.5599	374.0009	8.7434	0.9314	335.5738	4.9988(戊辰)	101.4913	110.4631
10 夕迟初	358.6424	100.5599	374.0009	8.7434	0.9314	359.5738	28.9988(壬辰)	101.4913	110.4631
11 夕迟末	386.6424	102.4699	375.4509	10.1934	1.0814	22.4813	57.1488(辛酉)	103.5513	112.5092
12 夕疾初	414.6424	106.7799	378.7309	13.4734	1.4154	50.8153	25.4828(己丑)	108.1953	117.1532
13 夕疾末	442.6424	112.2899	382.9209	17.6634	1.8309	79.2308	53.8983(丁巳)	114.1208	123.0787
14 夕伏	470.6424	118.3999	387.5609	22.3034	2.2753	107.6752	22.3427(丙戌)	120.6752	129.6331
15 合伏	487.5024	122.2599	390.4909	25.2334	2.5468	124.8067	39.4742(癸卯)	124.8067	133.7646

注: 初末限中正值为初限, 负值为末限; 盈缩差中盈取正值, 缩取负值. “定日”的整数部分表干支, 取甲子 = 0.

在表3中, 仅夕退的定星和加时定星张培瑜等^{[6]699}推步为 106.338° 和 115.310° , 与本文仅差 0.000° .

在表4中, 仅月龄栏的7~10行、13~15行和经朔干支栏的7~15行的总计16个数值与张培瑜等^{[6]699-703}的推步结果相差 0.0001 d. 另外, 序15, 张培瑜等^{[6]699-703}得4月28日, 本文为3月. 因初日1300年4月17日的干支癸卯, 月龄为 26.8075 d, 据计算该月朔日为1300年3月22日, 次朔为4月20日, 再计算两朔日元大都地方时0时的太阳黄经为 8.85° 和 37.08° , 故该月含3月中气谷雨(黄经 30°), 故依正月建寅似可定该月为阴历3月. 还有序4的初日张培瑜等^{[6]699-703}得1299年5月24日, 但该日干支为甲戌, 而次日1299年5月25日的干支为乙亥.

表 4 《授时历》推步 1299 年木星历表 (2)

Table 4 The ephemeris of Jupiter in 1299 calculated by Shoushi Li (2)

序	月 / 日	月龄 (d)	经朔干支 (d)	加减定分 (°)	晨前夜半定星 (°)	夜半星度 (°)	初日 (公历)	黄经 (°)
1	2/10	8.3823	48.7690(壬子)	-0.0348	96.6633	壁 2.3058	1299-03-12	356.43
2	2/27	25.5500	48.7690(壬子)	-0.0702	100.7956	壁 6.4381	1299-03-29	0.50
3	3/25	24.5171	18.2996(壬午)	-0.1715	107.3020	奎 3.6045	1299-04-26	6.91
4	4/25	23.4399	47.8302(辛亥)	-0.0486	113.3883	奎 9.6908	1299-05-25	12.91
5	5/23	22.2576	17.3608(辛巳)	-0.0742	118.0210	奎 14.3235	1299-06-22	17.48
6	6/22	20.8789	46.8914(庚戌)	0.0000	120.1571	奎 16.4596	1299-07-20	19.58
7	7/16	15.3483	16.4220(庚辰)	0.0000	120.1571	奎 16.4596	1299-08-13	19.58
8	9/04	2.9014	15.4832(己卯)	0.0615	115.3717	奎 11.6742	1299-09-29	14.87
9	10/20	19.9850	45.0138(己酉)	0.0000	110.4631	奎 6.7656	1299-11-14	10.03
10	11/15	14.4544	14.5444(戊寅)	0.0000	110.4631	奎 6.7656	1299-12-08	10.03
11	12/14	13.0738	44.0749(戊申)	-0.0179	112.4913	奎 8.7938	1300-01-06	12.04
12	1/13	11.8772	13.6055(丁丑)	-0.0869	117.0663	奎 13.3688	1300-02-03	16.55
13	2/11	10.7622	43.1361(丁未)	-0.1886	122.8901	娄 1.3226	1300-03-02	22.29
14	3/11	9.6760	12.6667(丙子)	-0.0754	129.5577	娄 7.9902	1300-03-31	28.86
15	3/28	26.8075	12.6667(丙子)	-0.1091	133.6555	娄 12.0880	1300-04-17	32.90

注: 该表内容接表 3, 各段目名称可由序号确定. 月 / 日指阴历月、日, 其阴历月取寅正; 经朔干支整数部分指日干支 (取甲子 = 0), 小数部分表时刻, 为日的小数; 加减定分中顺段取负值, 退段取正值. 夜半星度指所处 28 宿中某宿的宿度.

由表 3~4 可以得出, 我们恢复的《授时历》推步法与张培瑜等^{[6]696-703}推步的结果最大相差仅为 0.000 1° (或 0.000 1 d), 由此可确认本文恢复了《授时历》步五星法, 于是可利用其进一步做《授时历》五星推步的精度分析.

5 五星推步精度

《授时历》推步五星位置的精度如何, 这需要与现代历算值进行比较. 因各平诸段 (平合、见、伏等) 至所求年天正冬至点的定长度: 各段定星 = 各段中星 ± 盈缩差, 且诸段初日晨前夜半定星 = 加时定星 + 加减定分. 于是, 此时黄经值为

$$\lambda = \text{MOD}((\text{各段中星} + \text{盈缩差} + \text{加减定分}) \times 360.0 / \text{周天} - 90.0, 360.0).$$

本文据《授时历》步五星术, 详细计算了 1280~1650 年间五星诸段初日元大都 (现北京) 夜半时刻的黄经值, 但诸应取早期值为算. 作为比较, 我们采用长周期的 DE406 历表计算东经 116.4° 的子夜时刻的五星黄经位置, 并以两者之差确定《授时历》的推步误差, 详细结果见图 1.

图 1 所示为《授时历》五星黄经计算结果与现代历算结果的差值. 五星的误差情况各有特点, 图形各异. 从长期看水星、火星比较平稳, 金星、土星随着时间的推移振幅加大, 木星的振幅似并未加大, 但位置却逐渐下移.

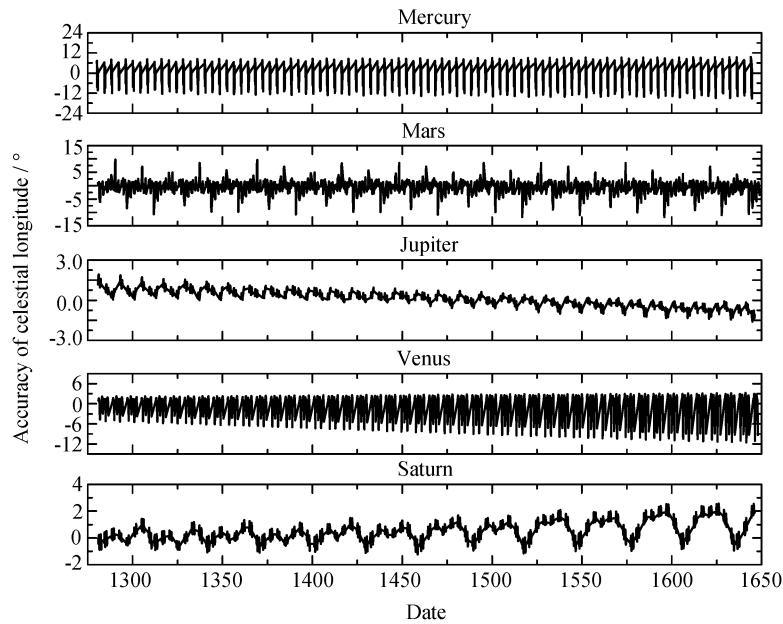


图 1 《授时历》推步 1280~1650 年间五星诸段初日元大都 (北京) 夜半时刻黄经的误差

Fig. 1 The errors of celestial longitudes of the five-planet at midnight of the first day in every segment from 1280 to 1650 in Beijing, calculated by *Shoushi Li*

表 5 给出了《授时历》推步 1280~1650 年间五星在各段初日夜半黄经的平均误差, 误差取《授时历》历算值与现代计算值的差值, 其单位 $^{\circ}$ 亦取现今概念. “:” 前为误差平均值, 后为误差绝对值的均值. 可见,《授时历》在行用期内, 木星的推步精度最高, 误差的绝对值平均为 0.49° , 稍次是土星, 误差为 0.70° , 然后是火星 1.91° , 金星 2.82° , 其次为水星 5.01° . 可见内行星的误差明显高于外行星. 就最大误差而言, 木星为 1.93° , 土

表 5 《授时历》五星推步误差表 (1280~1650)

Table 5 The errors of celestial longitudes of the five-planet from 1280 to 1650 calculated by *Shoushi Li*

	行星				
	木星	火星	土星	金星	水星
1280~1379	$0.73^{\circ} : 0.73^{\circ}$	$-0.45^{\circ} : 1.77^{\circ}$	$0.09^{\circ} : 0.38^{\circ}$	$-0.99^{\circ} : 1.98^{\circ}$	$-1.79^{\circ} : 4.46^{\circ}$
1380~1479	$0.33^{\circ} : 0.37^{\circ}$	$-0.65^{\circ} : 1.85^{\circ}$	$0.29^{\circ} : 0.50^{\circ}$	$-1.38^{\circ} : 2.62^{\circ}$	$-1.92^{\circ} : 4.87^{\circ}$
1480~1579	$-0.16^{\circ} : 0.28^{\circ}$	$-0.73^{\circ} : 1.98^{\circ}$	$0.67^{\circ} : 0.84^{\circ}$	$-1.74^{\circ} : 3.25^{\circ}$	$-2.09^{\circ} : 5.29^{\circ}$
1580~1650	$-0.64^{\circ} : 0.64^{\circ}$	$-1.15^{\circ} : 2.11^{\circ}$	$1.14^{\circ} : 1.23^{\circ}$	$-2.01^{\circ} : 3.69^{\circ}$	$-2.16^{\circ} : 5.63^{\circ}$
1280~1650	$0.13^{\circ} : 0.49^{\circ}$	$-0.71^{\circ} : 1.91^{\circ}$	$0.50^{\circ} : 0.70^{\circ}$	$-1.49^{\circ} : 2.82^{\circ}$	$-1.98^{\circ} : 5.01^{\circ}$
最大误差	1.93°	11.72°	2.56°	11.57°	15.26°
总数据量	2208	2576	2024	2760	1840

星 2.56° , 而火星、金星、水星均超过 10° .

6 几点讨论

步五星是中国古代历法比较困难的部分.《授时历》的五星推步主要是沿袭前历,并未有实质性进步,故精度并没有想象中的高.一般而言,《授时历》推步五星位置的误差来源于多方面,主要包括:(1) 历经所给五星周期等参数的精度;(2) 平合起算点位置和时间推步的精度;(3) 冬至点和近日点的精度;(4) 五星动态表的精度;(5) 盈缩差的精度;(6) 推步术自身存在的问题.

就五星推步的精度而言,张培瑜等^{[6]710-713}指出元明两代用《授时历》计算木星、土星的精度约为 $1^\circ \sim 2^\circ$,火星有 $\pm 3^\circ$ 左右的误差,最大绝对误差可达 $5^\circ \sim 6^\circ$,水星、金星绝对误差可达 10° 以上.另外,张健^[17]曾用《大统历》推步 1531 年逐日五星黄经,得木星、火星、土星、金星、水星的误差分别为 0.60° 、 -1.69° 、 -1.35° 、 9.23° 和 14.98° .唐泉^[18]考察 1282~1302 年间用《授时历》推步外行星的精度,得木星、火星和土星赤经误差的绝对值平均分别为 0.61° 、 0.98° 和 0.38° .这些结论与本文所得基本一致.

基于图 1 的计算,我们还将诸应的后期采用值代入,这样的变化并不影响诸段初日夜半的黄经值,而受其影响的有闰余和经朔等项,这些都属历法推步的步气朔部分.此外,若取消《授时历》的年长变化,则计算所得的黄经值将小于图 1 的计算值.在 1280~1650 年内其减幅从 0 逐步增加直到 0.13 止.原因如下:据公式后合中星 = 周率 - 前合 = 周率 - MOD(距算 \times 岁实 + 合应, 周率),到 1650 年,距算 = 369 yr,依《授时历》推步术,年长下算时百年减一分,可得 1645 年,年长减小值 = $369 \times 0.0001 / 100 = 0.000369$ d.若取消岁实消长,即采用《大统历》年长值,将导致(距算 \times 岁实)的值增加 $369 \times 0.000369 = 0.1362$ d,即前合值增加 0.1362 d,于是,后合中星将减少 0.1362 d.而太阳日行 $360 / 365.2575 = 0.9856^\circ$,故导致黄经值因去除岁实消长到 1650 年将减少 0.13° .从而与实际计算的结果相合.

可见《授时历》在至元三十一年调整参数并不影响五星位置的计算结果,但却引起步气朔结果的变化,同时与气朔相关联的躔、离、交食推步均受影响.故参数的调整很可能是为了提高《授时历》这一部分的推步精度.但如要精确考究其影响的内容、范围和程度还需在研究气朔、躔、离和交食推步时专门详论.

本文直接采用张培瑜等^{[6]685-687}给出的五星现代数据以考察《授时历》所采用的五星推步参数对精度的影响,包括周率、历率、实合黄经和近日点真黄经.因度率 = 历率 / 历度 = 历率 / 365.2575,合应 = $(270 - \text{实合黄经}) \times 365.2575 / 360$ 以及平合入历度 = $(\text{历应} - \text{合应}) / \text{度率}$,冬至点近日点角距 = 平合入历度 + 合应,近日点真黄经 = $270 - \text{冬至点近日点角距} \times 360 / 365.2575$.于是五星的度率、合应和历应可由此解得,修正后的数值亦列于表 1.

本文试图用较为准确的现代值,包括合应、历应的修正值和各种周期的修正值,代入《授时历》五星计算模型,以考察其推步精度的变化情况(图 2),但结果颇为意外,如此做法五星推步的精度并未改善.木星、土星稍有降低,误差的绝对值平均分别为 1.83° 和

1.21°, 但水星、金星和火星的误差却大幅增加, 平均误差分别为 30.04°、54.86° 和 10.82°。这表明, 部分基本参数的修正并不能提高结果的精度, 因为它并未完全消除以上所提到的误差来源, 只是部分考虑了前 3 个原因。此外, 水星、金星误差加大还有一个原因在于其历率并非指恒星周期, 古今概念存有差异。火星误差加大亦可能在于其推步本身就比较特殊, 加之它的偏心率较大, 从而相应的中心差及古历推步中的盈缩差亦较大。当然, 误差加大的原因还有本文未涉及的盈缩差和动态表所造成的误差等问题, 其根本原因或许就是《授时历》推步术本身的缺陷, 毕竟它不同于现代天文历算。

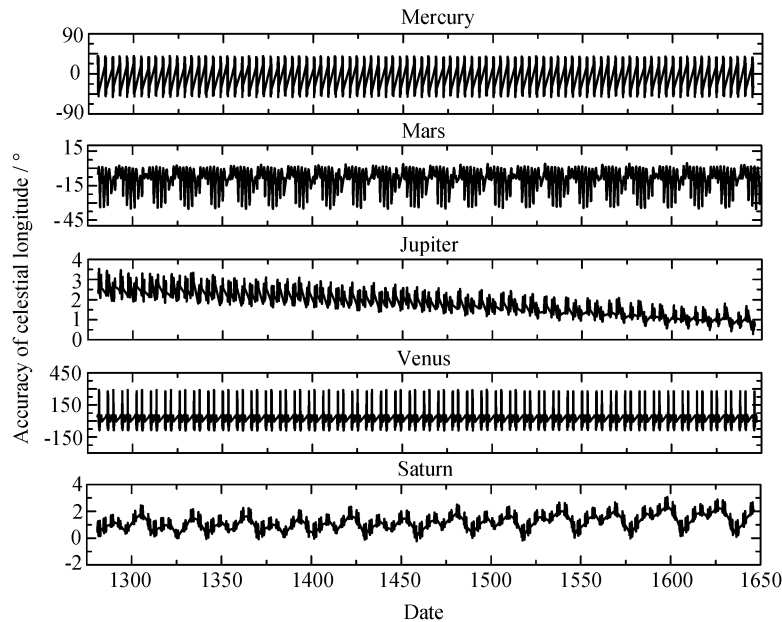


图 2 《授时历》参数修正后推步 1280~1650 年间五星在诸段初日元大都 (北京) 夜半黄经的误差

Fig. 2 The errors of celestial longitudes of the five-planet at midnight of the first day in every segment from 1280 to 1650 in Beijing after correcting fundamental parameters, calculated by Shoushi Li

值得一提的是, 本文的五星盈缩差由盈缩差公式求得, 但据《授时历》, 盈缩差亦可由立成表推得, 现已发现公式计算与立成表内插所得结果并不完全一致。

参 考 文 献

- [1] 宋濂. 元史. 北京: 中华书局, 1976: 3845-3852
- [2] 邢云路. 古今律历考 // 丛书集成初编 (第 1311 册 - 第 1323 册). 上海: 商务印书馆, 1936
- [3] 黄宗羲. 授时历故 // 嘉业堂丛书. 子部. 1836
- [4] 王应伟. 中国古历通解. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1998
- [5] 陈美东. 古历新探. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1995
- [6] 张培瑜, 陈美东, 薄树人, 等. 中国古代历法. 北京: 中国科学技术出版社, 2008: 613-720
- [7] 曲安京. 中国数理天文学. 北京: 科学出版社, 2008
- [8] 曲安京. 中国历法与数学. 北京: 科学出版社, 2005
- [9] 山田庆儿. 授时历之路 — 中国中世纪的科学与国家. 东京: 米苏祖书房, 1980

- [10] Sivin N. *Granting the Seasons*. New York: Springer, 2008
- [11] 聂内清, 中山茂. 《授时历》译注与研究. 川崎: I. K. Cooperation, 2006
- [12] Li Y, Zhang C Z. *A&A*, 1998, 332: 1142
- [13] 李勇. *自然科学史研究*, 2009, 28: 48
- [14] Li Y, Zhang C Z. *A&A*, 1998, 333: L13
- [15] 李勇, 张培瑜. *南京大学学报: 自然科学版*, 1996, 32: 16
- [16] 中华书局编辑部. *历代天文律历等志汇编* (第 9 册). 北京: 中华书局出版社, 1976: 3422-3444
- [17] 张健. *天文学报*, 2008, 49: 208
- [18] 唐泉. *西北大学学报: 自然科学版*, 2009, 39: 911

The Accuracy of the Five-planet Locations Calculated by the Chinese Ancient Calendar Named *Shoushi Li*

LI Yong

(*National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012*)

ABSTRACT The calendar *Shoushi Li* is one of the most famous calendars in ancient China, which was recorded in the *Lizhi* (ancient calendar book of China) of *Yuanshi* (annals of the Yuan Dynasty from 1279 to 1367). There are seven important calculation parts, including solar terms, syzygies, corrections of the sun and the moon, eclipses and so on. The locations of the five-planet are also in the list. Almost every part has a corresponding section in the modern astronomical year book. It is the last calendar formulated only by Chinese astronomers and its period of usage (from 1281 to 1644) is the longest one in ancient China. It was also a new calendar system which cast off the traditional method by which calculations were carried out from the epoch of the distant past. The basic constants were obtained by meticulous observations and then used in calculations.

In this paper, the calculation methods of planetary locations in *Shoushi Li* are investigated and recovered by studying the official texts of *Yuanshi*. (1) The locations of the ephemeris of Jupiter in 1299 are derived and our recovering method is affirmed by comparing with other studies. (2) The calculated accuracies of celestial longitudes of the five-planet from 1280 to 1650 are obtained. For Jupiter, Mars, Saturn, Venus and Mercury, the average values of absolute errors are 0.49° , 1.91° , 0.70° , 2.82° and 5.01° . Jupiter and Saturn have comparatively higher accuracies. (3) *Zhoulu*, *Lilu*, *Dulu*, *Heying* and *Liyang* are used for planetary calculations in *Shoushi Li*. Their accurate values, instead of those adopted in *Shoushi Li*, are derived and calculated by modern astronomical methods and then inputted into *Shoushi* models. It is found that the accuracies of planetary locations are not improved. The errors of Jupiter and Saturn are 1.83° and 1.21° . But the errors of Mercury, Venus and Mars ascend to 30.04° , 54.86° and 10.82° , respectively. It is indicated that the accuracies can not be increased by revising some of the important parameters based on modern science.

Key words history and philosophy of astronomy, ephemerides, planets and satellites: individual: Jupiter, Mars, Saturn, Venus, Mercury