# 引力常数随时间变化对双星轨道演变的长期效应 (椭圆轨道情形)

李林森 †

(东北师范大学物理学院 长春 130024)

**摘要**　给出了以偏近点角为自变量的变引力常数的摄动方程组的解. 解包括轨道半长轴的长期和周期变化项，其他轨道根数在一阶解中无长期项，只有周期项. 近星点经度和平经度在二阶解中显示长期项变化. 给出了由于引力常数变化对双星轨道演变情况的数值估计，对结果做了讨论并给出结论.

**关键词**　天体力学，双星：普通

**中图分类号：** P 135;　　**文献标识码：** A

## 1　引言

引力常数变化包括引力常数随时间和空间变化以及随速度变化，并分各向同性和各向异性两种变化. 引力常数变化对天文地球物理和宇宙学有一定影响，特别是从长远考虑，对天体运动的影响应该考虑. 引力常数变化在天体力学中构成了变引力天体力学，它同变质量天体力学有同等地位. 最早研究这类天体力学的是 Hadjidemetriou[1−2]. 随后 Kholchevnikov 等 [3] 用两类吻合轨道根数变化研究变引力常数的天体力学. 文献 [3] 给出的第 2 类轨道根数变化方程类似于 Hadjidemetriou 给出的摄动方程 [1]. Kholchevnikov 等人所建立的变质量和变引力常数的轨道根数变化方程就属这类. 如果令引力常数不变，质量随时间变化，即变质量方程；如果令质量不变，引力常数随时间变化，即变引力常数方程. 此后， Vinti[4] 研究了引力常数 $G$ 随速度变化对天体轨道的各向异性的影响，并对行星、月球和人造卫星轨道产生的效应做了估计. Hut 等 [5] 研究了具有减引力常数随时间变化的二体问题并在 Hadjidemetriou 的理论基础上研究了平均运动和平均经度的长期变化方程，并用此解释了某些宇宙学问题，但在文中并没有给出轨道半长轴、轨道偏心率和近星点经度的长期变化的解. 近年来，作者研究了引力常数随时间、空间和速度变化对地球自转产生的影响 [6−7], 也研究了引力常数的大尺度距离变化对天体轨道根数产生的影响并对行星轨道的效应做了数值估计 [8]. 作者又将引力常数随时间变化对双星轨道的演变情况做了研究，但只限于圆形轨道的情形 [9]. 然而在双星系统中严格圆形轨道是很少见的，只有因潮汐摩擦使轨道最终达到同步圆形化的双星轨道才是真正圆形轨

2010-08-09 收到原稿， 2010-12-16 收到修改稿

† dbsd-lls@163.com

道．针对这点，作者又研究了在椭圆轨道情形中引力常数随时间变化对所有轨道根数产生的影响．作者主要根据文献 [3] 给出的变引力常数的方程，以偏近点角为自变量推算方程的解并应用于双星轨道的长期演变问题上．

## 2　在椭圆轨道上变引力和变质量的轨道根数随时间变化的方程

Hut 等 [5] 用以下变引力常数和变质量运动方程研究了引力常数随时间减弱的二体运动问题：

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu(t)}{r^3}\vec{r}, \tag{1}$$

其中 $\mu(t) = G(t)[m_1(t) + m_2(t)]$, $m_1$ 和 $m_2$ 分别是主星和伴星的质量．并在文献 [2] 的基础上研究了平近点角和平经度的变化问题．

Kholchevnikov 等 [3] 将运动方程转换成两种类型的吻合轨道根数变化方程并推导出具有变引力常数和变质量的轨道半长轴 $a$ 、轨道偏心率 $e$ 、近星点经度 $\omega$ 、平近点角 $M$ 和平经度 $\lambda$ 的方程组．这里引用第 2 类轨道根数变化方程组 [3]:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\chi a(\frac{2a}{r} - 1)\,, \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\chi(e + \cos f)\,, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\chi\frac{\sin f}{e}\,, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n + \chi\frac{\sin f}{e}\sqrt{1-e^2}(1 + e^2\frac{r}{p})\,, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\,, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = 0\,, \tag{7}$$

其中 $\chi = \frac{\dot{\mu}}{\mu} = \frac{1}{Gm}\frac{\mathrm{d}Gm}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, 而 $f$ 为真近点角， $n$ 为平均运动， $p = a(1-e^2)$. Kholchevnikov 等 [3] 推出的方程 (2)∼(4) 等同于 Hut 等 [5] 引用 Hadjidemetriou[1] 中给出的方程．当 $m = m(t)$ 和 $G = G(t)$ 时， $\chi = \dot{\mu}/\mu$.

在本文中只考虑 $G$ 随时间变化，而不考虑质量 $m$ 的变化，则 $\chi = \frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \dot{G}/G$. 这里假定 $\dot{G}/G$ 为常数 ($10^{-13}\ \mathrm{yr}^{-1}$ 量级，见第 5 节), 为解上述方程组，作者以偏近点角 $E$ 为自变量，故引用二体问题中的公式 [10]

$$\begin{cases} r = a(1 - e\cos E) \\ \sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E} = \frac{a}{r}(\sqrt{1-e^2}\sin E) \\ \cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} = \frac{a}{r}(\cos E - e) \end{cases} \quad . \tag{8}$$

将 (8) 式代入 (2)∼(6) 式，则得摄动方程

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\frac{\dot{G}}{G}(\frac{2a^2}{r} - a)\,, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=-\frac{\dot{G}}{G}[e+\frac{a}{r}(\cos E-e)]\,,\tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{\dot{G}}{G}(\frac{a}{r})\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\sin E\,,\tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n+\frac{\dot{G}}{G}(\frac{p}{er}+e)\sin E\,,\tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\,.\tag{13}$$

上面推出的方程 (9)∼(11) 等同于 Hadjidemetriou[2] 给出的方程. 当 $m=m_0$, $G=G(t)$, $\frac{\dot{\mu}}{\mu}=\frac{\dot{G}}{G}$, $m_0$ 是 $t=0$ 时的初始质量.

## 3 方程组 (9)∼(13) 的解 (轨道根数变化式)

为解方程组 (9)∼(13), 再引入 $E$ 随时间变化的方程 [3]

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=n(\frac{a}{r})+\frac{\dot{G}}{G}\frac{\sin f}{e\sqrt{1-e^2}}=\frac{na}{r}+\frac{\dot{G}}{G}\frac{a}{r}\frac{\sin E}{e}\,,\tag{14}$$

(14) 式可写成

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E}=(\frac{an}{r})^{-1}(1+\frac{\dot{G}}{G}\frac{\sin E}{ne})^{-1}\,,\tag{15}$$

式中 $\frac{\dot{G}}{G}\frac{\sin E}{ne}<1$ ($\dot{G}/G\sim10^{-13}\ \mathrm{yr}^{-1}$, $\sin E\le1$, $(\frac{1}{n})_{\max}=(\frac{P}{2\pi})_{\max}=4.88\times10^{-3}$, $(\frac{1}{e})_{\max}=1/0.03=33.33$, 其中已用本文表 1 中的最大周期 $P$ 和最小的偏心率 $e$ 的值). 故 (15) 式可用二项式定理展开，略去 $(\dot{G}/G)^3$ 的项后，则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E}=\frac{r}{an}-\frac{\dot{G}}{G}\frac{r\sin E}{an^2e}+(\frac{\dot{G}}{G})^2\frac{r\sin^2E}{an^3e^2}\,.\tag{16}$$

利用 (16) 式，将以时间为自变量的方程组 (9)∼(13) 转换为以 $E$ 为自变量的方程组，即

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}E}=\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E}=-\frac{\dot{G}}{G}(\frac{2a}{n}-\frac{r}{n})+(\frac{\dot{G}}{G})^2(\frac{2a\sin E}{n^2e}-\frac{r\sin E}{n^2e})\,,\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}E}\quad=\quad&\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E}=-\frac{\dot{G}}{G}[\frac{er}{an}+\frac{1}{n}(\cos E-e)]+\\&(\frac{\dot{G}}{G})^2[\frac{r\sin E}{an^2}+\frac{\sin E}{n^2e}(\cos E-e)]\,,\end{aligned}\tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E}=-\frac{\dot{G}}{G}(\frac{\sqrt{1-e^2}}{ne}\sin E)+(\frac{\dot{G}}{G})^2(\frac{\sqrt{1-e^2}\sin^2E}{n^2e^2})\,,\tag{19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}E}\quad=\quad&\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E}=\frac{r}{a}+\frac{\dot{G}}{G}[\frac{1-e^2}{ne}+\frac{er}{an}-\frac{r}{ane}]\sin E-\\&(\frac{\dot{G}}{G})^2[\frac{1-e^2}{n^2e^2}+\frac{r}{an^2}-\frac{r}{an^2e^2}]\sin^2E\,,\end{aligned}\tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}E}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}E}\,.\tag{21}$$

将上面方程组的右端用 $r=a(1-e\cos E)$ 代入后，经过推算则得到以下以 $E$ 为自变量的方程组：

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}E}=-\frac{\dot{G}}{G}(\frac{a}{n})(1+e\cos E)+(\frac{\dot{G}}{G})^2(\frac{a}{2n^2e})(2\sin E+e\sin 2E)\,, \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}E}=-\frac{\dot{G}}{G}(\frac{1-e^2}{n})\cos E+(\frac{\dot{G}}{G})^2(\frac{1-e^2}{2n^2e})\sin 2E\,, \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}=-\frac{\dot{G}}{G}(\frac{\sqrt{1-e^2}}{ne})\sin E+(\frac{\dot{G}}{G})^2(\frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2e^2})\sin^2 E\,, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}E} \quad = \quad & (1-e\cos E)+\frac{\dot{G}}{G}(\frac{1-e^2}{2n})\sin 2E- \\ & (\frac{\dot{G}}{G})^2(\frac{1-e^2}{4n^2e})(\cos E-\cos 3E)\,,\end{aligned} \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}E}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}E}\,. \tag{26}$$

对 (22)~(26) 式进行积分，得轨道根数的长期和周期变化量表达式：

$$\begin{aligned}\delta a \quad = \quad & \frac{\dot{G}}{G}A_0^{(1)}[(E-E_0)+e(\sin E-\sin E_0)]+ \\ & (\frac{\dot{G}}{G})^2\sum_{i=1}^{2}A_i^{(2)}(\cos iE-\cos iE_0)\,,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\delta e=\frac{\dot{G}}{G}E_1^{(1)}(\sin E-\sin E_0)+(\frac{\dot{G}}{G})^2\sum_{i=1}^{2}E_i^{(2)}(\cos iE-\cos iE_0)\,, \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\delta\omega \quad = \quad & +\frac{\dot{G}}{G}(\frac{\sqrt{1-e}}{ne})(\cos E-\cos E_0)+ \\ & (\frac{\dot{G}}{G})^2[W_0^{(2)}(E-E_0)+\sum_{i=1}^{2}W_i^{(2)}(\sin iE-\sin iE_0)]\,,\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\delta M \quad = \quad & (E-E_0)-e(\sin E-\sin E_0)+\frac{\dot{G}}{G}\sum_{i=1}^{2}K_i^{(1)}(\cos iE-\cos iE_0)+ \\ & (\frac{\dot{G}}{G})^2\sum_{i=1}^{3}N_i^{(2)}(\sin iE-\sin iE_0)\,,\end{aligned} \tag{30}$$

$$\delta\lambda=\delta\omega+\delta M\,. \tag{31}$$

式中

$$\begin{aligned}&A_0^{(1)}=-a/n,\quad A_1^{(2)}=-a/(n^2e),\quad A_2^{(2)}=-a/(4n^2);\\ &E_1^{(1)}=-(1-e^2)/n,\quad E_1^{(2)}=0,\quad E_2^{(2)}=-(1-e^2)/(4n^2e);\\ &W_0^{(2)}=\sqrt{1-e^2}/(2n^2e^2),\quad W_1^{(2)}=0,\quad W_2^{(2)}=-\sqrt{1-e^2}/(4n^2e^2);\\ &K_1^{(1)}=0,\quad K_2^{(1)}=-(1-e^2)/(4n);\\ &N_1^{(2)}=-(1-e^2)/(4n^2e),\quad N_2^{(2)}=0,\quad N_3^{(2)}=(1-e^2)/(12n^2e)\,.\end{aligned}$$

## 4 轨道长期变化

取 (27)~(30) 式中的长期项，利用 $A_0^{(1)}$ 和 $W_0^{(2)}$ 各式可得 $\dot{G}/G$ 一阶解和 $(\dot{G}/G)^2$ 二阶解中轨道长期项变化量：

$$\delta a^{(1)} = \frac{\dot{G}}{G}A_0^{(1)}(E-E_0), \quad \delta e^{(1)} = 0, \quad \delta\omega^{(1)} = 0\,, \tag{32}$$

$$\delta\omega^{(2)} = +(\frac{\dot{G}}{G})^2 W_0^{(2)}(E-E_0), \quad \delta a^{(2)} = 0, \quad \delta e^{(2)} = 0\,, \tag{33}$$

$$\delta M^{(2)} = E - E_0, \quad \delta\lambda^{(2)} = \delta\omega^{(2)} + \delta M^{(2)}\,. \tag{34}$$

令 $E_0 = 0$, $E = 2\pi$, 即双星在轨道运转一周时 $E - E_0 = 2\pi$, 周期项消失，轨道长期变化率为

$$\Delta a_s^{(1)} = -\frac{\dot{G}}{G}(2\pi a/n) = -\frac{\dot{G}}{G}(aP) \ \ \mathrm{cm/cycle}\,, \tag{35}$$

$$\Delta e_s^{(1)} = 0, \quad \Delta\omega_s^{(1)} = 0, \quad \Delta M_s^{(1)} = 0\,, \tag{36}$$

$$\Delta\omega_s^{(2)} = (\frac{\dot{G}}{G})^2(\frac{\pi\sqrt{1-e^2}}{n^2e^2}) \ \ \mathrm{rad/cycle}\,, \tag{37}$$

$$\Delta M_s^{(2)} = 2\pi \ \ \mathrm{rad/cycle}\,, \tag{38}$$

$$\Delta\lambda_s^{(2)} = \Delta\omega_s^{(2)} + \Delta M_s^{(2)}, \quad n = 2\pi/P\,. \tag{39}$$

由此可得轨道根数年变率的一阶和二阶分别为

$$\dot{a}_s^{(1)} = -\frac{\dot{G}}{G}(a) \ \ \mathrm{cm/yr}, \quad \dot{e}_s^{(1)} = 0, \quad \dot{\omega}_s^{(1)} = 0, \quad \dot{M}_s^{(1)} = \dot{\lambda}_s^{(1)} = 0\,, \tag{40}$$

$$\dot{a}_s^{(2)} = 0, \quad \dot{e}_s^{(2)} = 0, \quad \dot{\omega}_s^{(2)} = (\frac{\dot{G}}{G})^2(\frac{\sqrt{1-e^2}}{4\pi e^2}P) \ \ \mathrm{rad/yr}\,, \tag{41}$$

$$\dot{M}_s^{(2)} = n, \quad \dot{\lambda}_s^{(2)} = \dot{\omega}_s^{(2)} + \dot{M}_s^{(2)}\,. \tag{42}$$

注意 (35) 、 (41)~(42) 式中 $P$ 以 yr 为单位，但表 1 中以 d 为单位.

由开普勒第三定律 $4\pi^2a^3/P^2 = Gm$ 可以推出 $P$ 的变率

$$\dot{P} = \frac{3}{2}(\frac{P}{a})\dot{a} - \frac{P}{2}\frac{\dot{G}}{G}\,. \tag{43}$$

将 $\dot{a} = -\frac{\dot{G}}{G}a$ 代入后得 $P$ 的一阶变率

$$\dot{P} = -2\frac{\dot{G}}{G}P \ \ \mathrm{s/yr}\,. \tag{44}$$

(44) 式中 $P$ 以 s 为单位，但表 1 中 $P$ 以 d 为单位.

## 5 对双星轨道根数变率的上下限估计

利用本文 (40)~(44) 式计算由于引力常数的变化所引起的轨道根数的长期演变的上下限. 文中选取 6 颗双星作为计算实例，即 3 个一般双星 Y Cyg 、 C W Cep 和 $\delta$ Ori, 2 个脉冲星 PSR1913+16 、 PSRJ0737+3039 和一个黑洞 M33X-7. 这 6 颗双星的轨道半长轴 $a$ 、轨道周期 $P$ 和轨道偏心率 $e$ 的数据引自表 1 中的网址及文献 [11-15], 见表 1.

**表 1　6 颗双星数据**

**Table 1　Data of six binaries**

| Name | $P$(d) | $a(R_\odot)$ | $e$ | Reference |
|---|---|---|---|---|
| $\delta$ Ori | 5.7325 | 43.2 | 0.04 | http://Binaries.bovlder.swri.edu/atlas |
| Y Cyg | 2.9963 | 28.67 | 0.14 | [11] |
| C W Cep | 2.7291 | 22.34 | 0.03 | [12-13] |
| PSR1913+16 | 0.3230 | 2.80 | 0.617 | [14] |
| PSRJ0737+3039 | 0.10225 | 1.26 | 0.0878 | [14] |
| M33X-7 | 3.4500 | 42.4 | 0.0385 | [15] |

1980 年前 $\dot{G}/G$ 的测量和理论值为 $10^{-11}$ yr$^{-1}$ $\sim$ $10^{-10}$ yr$^{-1}$ 量级，而在 1980~1990 年给出的值为 $10^{-12}$ yr$^{-1}$ $\sim$ $10^{-11}$ yr$^{-1}$ 量级， 1990 年以后给出的值为 $10^{-13}$ yr$^{-1}$ $\sim$ $10^{-12}$ yr$^{-1}$ 量级．不同文献给出 $\dot{G}/G$ 的值不同．下面列出文献 [16] 从各文献引用的数据，见表 2.

**表 2　Will[16] 从其他文献中引用的 $\dot{G}/G$ 数据**

**Table 2　Data of $\dot{\mathrm{G}}/\mathrm{G}$ cited by Will[16] from other references**

| Method | $\dot{G}/G$ | Year | Reference |
|---|---|---|---|
| Binary pulsar1913+16 | $40 \pm 50$ | 1994 | [17] |
| Helioseismology | $0 \pm 16$ | 1998 | [18] |
| Lunar Laser Ranging (LLR) | $4 \pm 9$ | 2004 | [19] |
| Big bang nucleosynthesis | $0 \pm 4$ | 2004/2005 | [20]/[21] |

表 2 中 Will[16] 只引用到 2005 年的数据． 2007 年又有新的数据，即 Al-Rawaf[22] 用 WMAP 方法从微波背景测量核子合成得到的 $\dot{G}/G$ 的上下限值：

$$-6.4 \times 10^{-13}\ \mathrm{yr}^{-1} < \frac{\dot{G}}{G} < -1.6 \times 10^{-13}\ \mathrm{yr}^{-1}\,.$$

利用上述数据和表 1 中 $a$ 、 $P$ 和 $e$ 的数据代入 (40)~(44) 式后得到在 $\dot{G}/G$ 一阶解中和 $(\dot{G}/G)^2$ 二阶解中的轨道根数变率的数值，结果分别列入表 3 和表 4.

**表 3　6 颗双星轨道根数变率在 $\dot{G}/G$ 一阶解中的上下限**

**Table 3　Upper and lower limits of the secular evolution of the orbital elements of six binaries in the first-order solution**

| Name | $\dot{a}^{(1)}$(cm/yr) | $\dot{P}^{(1)}$($10^{-7}$ s/yr) | $\dot{e}^{(1)}$(yr$^{-1}$) | $\dot{\omega}^{(1)}$(rad/yr) | $\dot{M}^{(1)} = \dot{\lambda}^{(1)}$(rad/yr) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\delta$ Ori | $0.84 \sim 1.80$ | $2.77 \sim 5.96$ | 0 | 0 | 0 |
| Y Cyg | $0.56 \sim 1.19$ | $1.45 \sim 3.11$ | 0 | 0 | 0 |
| C W Cep | $0.43 \sim 0.93$ | $1.32 \sim 2.83$ | 0 | 0 | 0 |
| PSR1913+16 | $0.05 \sim 0.12$ | $0.15 \sim 0.33$ | 0 | 0 | 0 |
| PSRJ0737+3039 | $0.02 \sim 0.05$ | $0.05 \sim 0.11$ | 0 | 0 | 0 |
| M33X-7 | $0.82 \sim 1.77$ | $1.66 \sim 3.59$ | 0 | 0 | 0 |

**表 4 6 颗双星轨道根数在 $\dot{G}/G$ 二阶解中的上限值**

**Table 4 Upper limit of the secular evolution of the orbital elements of six binaries in the second-order solution**

| Name | $\dot{\omega}^{(2)}(10^{-25}$ rad/yr) | $\dot{M}^{(2)}(10^{-25}$ rad/yr) $-n$ | $\dot{\lambda}^{(2)}(10^{-25}$ rad/yr) $-n$ |
|---|---|---|---|
| $\delta$ Ori | 2.80667 | 0 | 2.80667 |
| Y Cyg | 0.11321 | 0 | 0.11321 |
| C W Cep | 2.37625 | 0 | 2.37625 |
| PSR1913+16 | 0.00052 | 0 | 0.00052 |
| PSRJ0737+3039 | 0.00988 | 0 | 0.00988 |
| M33X-7 | 1.82350 | 0 | 1.82350 |

注： $\dot{a}^{(2)}=0, \dot{P}^{(2)}=0, \dot{e}^{(2)}=0$

# 6 讨论

(1) 同引力辐射阻尼效应相比较

在本文中轨道半长轴由于引力常数变化有长期项，而广义相对论中无长期项，但引力辐射阻尼有长期项 [23], 如以 Y Cyg 和 PSR1913+16 为例，见表 5. 由表 5 中可以看出，引力常数变化对轨道半长轴产生的效应远比引力辐射阻尼对轨道半长轴产生的效应小. 轨道偏心率在本文效应中无长期项，这点同广义相对论效应相同，但在引力辐射效应中有长期项，故两者不能比较.

**表 5 同引力辐射阻尼效应 (2.5PN) 相比较**

**Table 5 Comparison with gravitational radiation damping effect (2.5PN)**

| Name | 2.5PN[23] | | Time variation of $G$ (First-order effect) |
|---|---|---|---|
| | $\Delta a$(cm/cycle) | $\dot{a}$(cm/yr) | $\dot{a}$(cm/yr) |
| Y Cyg | -0.87617 | -106.79 | $0.56 \sim 1.19$ |
| PSR1913+16 | -0.70453 | -796.66 | $0.05 \sim 0.12$ |

(2) 同广义相对论相比较

在本文中 $\omega$ 和 $\lambda$ 在二阶解中有长期项，在广义相对论中一阶和二阶解中也有长期项，两者的二阶解可以比较，如表 6. 由表 6 中可以看出，引力常数变化引起的近星点经度效应远小于广义相对论中的二阶解 (2PN) 的效应，所以引力常数变化对近星点经度的效应完全可以略去.

**表 6 同广义相对论相比较**

**Table 6 Comparison with the effect of general relativity**

| Name | 2PN[24] | Time variation of $G$ (Second-order effect) |
|---|---|---|
| | $\dot{\omega}^{(2)}$(rad/century) | $\dot{\omega}^{(2)}(10^{-23}$ rad/century) |
| $\delta$ Ori | 0.62 | 2.80 |
| Y Cyg | 185.47 | 0.11 |
| C W Cep | 1.36 | 2.37 |
| PSR1913+16 | 924.21 | 0.00052 |

(3) 观测效应的问题

目前，后牛顿或广义相对论理论对天体轨道的效应比较明显，各理论的相对精度已达到 $10^{-8}$ 量级 [25]. 而理论给出的效应可通过行星近星点进动的观测得到验证. 然而，变引力常数对轨道的影响并不属于后牛顿或广义相对论范围，它对轨道的影响目前并不明显，必须从长远观测得到. 变引力常数对轨道近星点在一阶解中不产生进动，虽然在二阶解中有进动，但其值甚小，如表 4 中给出的 $10^{-25}$ rad/yr, 这只有理论意义，无观测价值. 所以我们只能通过轨道半长轴和轨道周期的长期变化得到观测值. 由于每年变率较小，必须通过累积时间法观测. 以本文对 $\delta$ Ori 双星为例. 如果取 $\dot{G}/G \approx 10^{-13}\ \mathrm{yr}^{-1}$, 轨道半长轴变率每年最大值为 1 cm, 如取表 2 中 $\dot{G}/G \approx 10^{-12}\ \mathrm{yr}^{-1}$, 最大值为 10 cm, 所以要等到 10 yr 后观测应有 10 cm 或 100 cm 的变化. 这样大尺度变化在太阳系可借激光或雷达测距观测到. 虽然，目前对太阳系天体的定位用 LLR 、 SLR (Satellite Laser Ranging) 和雷达测距相对精度达 $10^{-11} \sim 10^{-10}$; 而牛顿力学框架下，太阳系内精度达 $10^{-8} \sim 10^{-7}$[26], 但是在遥远的数光年以外的双星就不能用此方法，必须用高精度天文测量方法, 如 ASTROD (Astrodynamical Space Test of Relativity Using Optical Devices) 空间计划方案 [27]. 观测双星的轨道周期变化最好采用本文表 3 给出的轨道周期变率 $10^{-7}$ s/yr. 这是指 1 yr 内的周期变化，如果在 1 d 内观测周期变化其变率为 $10^{-9}$ s/d, 所以必须用高精度天文测量方法在双星系统内观测精度达到 $10^{-9}$ 量级时，才需要考虑这种对轨道的影响. 由于观测技术的不断提高和改进以及空间科学突飞猛进的发展，可以期望观测变引力常数对轨道的影响问题不久将会提到日程上来.

## 7　结论

轨道半长轴在一阶解中有长期项和周期项，但在二阶解中只有周期项而无长期项. 轨道半长轴的变率每年同轨道半长轴成比例扩大. 轨道偏心率在一阶解和二阶解中均无长期项，两者均只有周期项. 近星点经度和平经度在一阶解中均无长期项，但在二阶解中均有长期项. 轨道倾角和升交点经度两者均无变化.

## 参 考 文 献


[1] Hadjidemetriou J D. Icar, 1963, 2: 440

[2] Hadjidemetriou J D. Icar, 1966, 5: 34

[3] Kholchevnikov C, Fracassini M. Le problème des deux corps avec G variable selon I'hypothèse de Dirac, Conferenze Dell' Osservatorio Astronomico di Milano Merate, 1968, Serie1. No.9: 1-50

[4] Vinti J P. CeMDA, 1972, 6: 198

[5] Hut P, Verhulst F. MNRAS, 1976, 177: 545

[6] 李林森. 上海天文台年刊， 2002, 23: 46

[7] 李林森. 天文研究与技术， 2007, 4: 135

[8] Li L S. IL Nuovo Cimento, 2009, 124: 849

[9] 李林森. 天文研究与技术， 2010, 7: 8

[10] Smart W M. Celestial Mechanics. London: Longmans, Green & Co, 1953: 18

[11] Simon K, Sturm E, Fiedler A. A&A, 1994, 292: 507

[12] Batten A H, Fletcher J M, MacCarthy D G. PDAO, 1989, 17: 1

[13] Brancewicz K, Dwarak T Z A. AcA, 1980, 30: 501
[14] Willems B, Kalogera V, Henninger M. ApJ, 2004, 616: 414
[15] Oroza J A, McClintock J E, Narayan R, et al. Natur, 2007, 449: 872
[16] Will C M. The Confrontation between General Relativity and Experiment. Mühlenberg: Max Planck Institute for Gravitational Physics, 2006: 5
[17] Kaspi V M, Taylor J H, Ryba M F. ApJ, 1994, 428: 713
[18] Guenther D B, Krauss L M, Demarque P. ApJ, 1998, 498: 871
[19] Williams J G, Turyshev S G, Boggs D H. PhRvL, 2004, 93: 1101
[20] Copi C J, Davis N, Krauss L M. PhRvL, 2004, 92: 1301
[21] Bambi C, Giannotti M, Villante F L. PhRvD, 2005, 71: 3524
[22] Al-Rawaf A S. Ap&SS, 2007, 310: 173
[23] 李林森. 物理学报， 1989, 38: 1877
[24] Li L S. IL Nouvo Cimento, 2005, 120: 21
[25] 童傅. 科学通报， 1984, 29: 34
[26] 易照华，黄 珹, 李林森. 天文学进展， 1994, 12: 3
[27] Ni W T. IJMPD, 2008, 17: 921

# Secular Effect of Evolution of the Orbits of Binaries Induced by the Variation of Gravitational Constant with Time (The Case for the Elliptical Orbit)

LI Lin-sen
(*School of Physics, Northeast Normal University, Changchun 130024*)

**Abstract** The solutions of the equations with the variable gravitational constant are given by taking the eccentric anomaly as independent variable. The solutions include the secular and periodic variations in semi-major axis, and other orbital elements only exhibit periodic variations in the first-order solutions. The longitude of periastron and mean longitude exhibit secular variations in the second-order solutions. The numerical estimations for the case of evolution of the orbits of six binaries are given. The results are discussed and concluded.

**Key words** celestial mechanics, binaries: general