

# 幂律电子谱韧致辐射积分的快速计算\*

李友平<sup>†</sup> 甘为群

(中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

**摘要** SSW (Solar SoftWare) 的能量电子产生 X 光子的韧致辐射积分计算发展到版本 2 时, 其性能相比初始的版本 1 提高很多. 在版本 2 的基础上, 对这个积分进一步改进. 通过对比几种韧致辐射积分方案, 结果显示, 最终的方案性能上比版本 2 可以快约 2~5 倍. 在积分的精确性上比版本 1 及版本 2 均改进了很多, 在缺省的积分控制精度下也不再产生光子谱的尖刺现象. 而且, 积分耗时不再敏感于积分上限取值. 由于积分性能的提高, 使得利用精确的韧致辐射截面计算韧致积分成为可能. 结果显示, 用精确韧致辐射截面比先前的近似截面积分的结果光子流量略小 ( $\leq 4\%$ ), 积分时间大约比先前使用近似截面多 30%.

**关键词** 太阳: X 射线, 伽玛射线, 太阳: 耀斑, 方法: 数值

**中图分类号:** P 182; **文献标识码:** A

## 1 引言

太阳耀斑硬 X 射线观测提供诊断耀斑加速的高能电子及其传播过程的重要手段<sup>[1-2]</sup>. 高能电子经韧致辐射过程发射 X 射线. 在通常的薄靶及厚靶韧致辐射模型里<sup>[1,3]</sup>, 从高能电子推求 X 射线流量要计算韧致辐射的积分. 假设高能电子的分布是负幂律谱, 在最简单的非相对论近似的 Bethe-Heitler 韧致辐射截面的情形下, 积分可以给出分析解, 得到的光子谱的分布同样是幂律谱, 其负幂律指数分别比源电子谱指数大 1 (薄靶) 或小 1 (厚靶), 这个简单近似解可以帮助我们理解韧致辐射的大致规律. 对于较复杂的韧致辐射截面或者比较复杂的高能电子分布形式, 这个积分就只能进行数值计算了.

精确的韧致辐射截面 3BN<sup>[4]</sup> 比较复杂, 计算量大, 所以在标准的 SSW 里的韧致辐射积分计算采用的是 Haug 对 3BN 的近似截面公式<sup>[5]</sup>. 即使如此, 这个积分计算也很花时间. 而且在对耀斑 X 射线谱的优化拟合中要反复调用这个积分计算. 因此, 这个积分的性能很重要. 由于分段幂律源电子谱韧致辐射积分计算很费时间, Brown 等<sup>[6]</sup> 在计算中不得不采用很不精确的 Bethe-Heitler 截面.

Holman 和 Su 对 SSW 初始的韧致积分第 1 版进行改进, 在 2009 年发布第 2 版 (网址: <http://hesperia.gsfc.nasa.gov/ssw/packages/xray/doc/brm.thick.doc.pdf>), 通过积

2010-09-25 收到原稿, 2010-11-16 收到修改稿

\* 国家自然科学基金项目 (10773031 和 10833007) 资助

<sup>†</sup> yplee@pmo.ac.cn

分变量的代换, 在计算速度上有很大的提高. 在相同的条件下, 薄靶计算比版本 1 可以快 10 多倍, 而对厚靶, 交换积分次序解析积分出内层积分使积分降解一重, 再结合对积分变量代换带来的性能, 计算速度比版本 1 提高约 200 倍.

然而, 测试发现, 版本 2 虽然在积分计算性能上提高了, 但它与版本 1 一样, 计算耗时严重依赖于电子幂律谱的指数, 同时也依赖于积分上限, 而且更严重的是积分值在某些参数下不能收敛到正确的值, 计算得到的光子谱呈现尖刺现象. 我们在版本 2 的基础上进一步改进, 计算性能进一步提高, 积分耗时不再对电子幂律谱指数及积分上限敏感, 而且在较低的积分控制精度下就可以大大减轻或者消除积分结果光子谱的尖刺现象.

## 2 韧致辐射积分

高能电子产生韧致辐射光子的基本计算是计算如下积分<sup>[1]</sup>

$$p(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} F(E)\sigma(\varepsilon, E)dE, \quad (1)$$

其中,  $\sigma(\varepsilon, E)$  是韧致辐射截面,  $\varepsilon$  代表光子能量,  $E$  代表源电子动能,  $F(E)$  是高能电子的分布, 针对太阳耀斑,  $F(E)$  通常取负幂律或者折断的双段负幂律形式. 如果电子分布取单负幂律谱, 而且截面只取简单的 Bethe-Heitler 截面形式, (1) 式可以解析积分出, 光子谱同样呈现单幂律形式, 且幂律指数比电子谱的软 1<sup>[3]</sup>.  $F(E)$  通常取如下更一般的折断的双段负幂律形式:

$$F(E) = \begin{cases} 0 & E < E_L \\ AE^{-\delta_1} & E_L \leq E < E_B \\ AE_B^{-\delta_1+\delta_2}E^{-\delta_2} & E_B \leq E < E_H \\ 0 & E \geq E_H \end{cases}. \quad (2)$$

其中,  $\delta_1$ 、 $\delta_2$  分别是折断能量  $E_B$  两侧低能、高能段的谱指数,  $E_L$ 、 $E_H$  分别是电子谱的低能、高能段的截断能量. 将 (2) 式代入 (1) 式, 可以看到基本的积分形式为

$$f(\varepsilon) = \int_a^b x^{-\delta}S(\varepsilon, x)dx, \quad (3)$$

其中,  $S(\varepsilon, x)$  是除幂律外的其它项, 对应于厚靶, 还包含一个积分<sup>[3]</sup>.

下面对 (3) 式进行积分变量代换, 共考虑了 5 种情况 (见 (4)~(8) 式). 其中 (4) 式和 (5) 式分别对应 SSW 的版本 1 和版本 2. (6)~(8) 式是我们新提出的变量代换公式.

$$x = y, \quad (4)$$

(4) 式对应的就是 SSW 的版本 1, 第 2 个为

$$x = 10^y, \quad (5)$$

(5) 式对应于 SSW 的版本 2, 第 3 个为

$$x = e^y, \quad (6)$$

(6) 式与 (5) 式没有本质区别, 第 4 个是

$$x = 1/y, \quad (7)$$

第 5 个是

$$x = y^{-\alpha/(\delta-1)}, \quad (8)$$

其中, 对应薄靶积分,  $\alpha$  取 2; 对应厚靶积分,  $\alpha$  取 4.

将 (4)~(8) 式的代换代入 (3) 式, 得到新的积分形式:

$$f(\varepsilon) = \int_a^b y^{-\delta} S(\varepsilon, y) dy, \quad (9)$$

$$f(\varepsilon) = \ln 10 \int_{\lg a}^{\lg b} 10^{-\delta y+y} S(\varepsilon, 10^y) dy, \quad (10)$$

$$f(\varepsilon) = \int_{\ln a}^{\ln b} e^{-\delta y+y} S(\varepsilon, e^y) dy, \quad (11)$$

$$f(\varepsilon) = \int_{1/b}^{1/a} y^{\delta-2} S(\varepsilon, 1/y) dy, \quad (12)$$

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\delta-1} \int_{y(b)}^{y(a)} y S(\varepsilon, x(y)) dy, y(a) = a^{-(\delta-1)/2}, y(b) = b^{-(\delta-1)/2}, \quad (13)$$

$$f(\varepsilon) = \frac{4}{\delta-1} \int_{y(b)}^{y(a)} y^3 S(\varepsilon, x(y)) dy, y(a) = a^{-(\delta-1)/4}, y(b) = b^{-(\delta-1)/4}. \quad (14)$$

### 3 结果和比较

下面我们测试比较 (9)~(14) 系列公式的计算性能. 测试是计算光子能量分别为 3 keV、5 keV、7 keV...401 keV 共 200 个不同能量的光子谱, 源电子谱取 20~32000 keV 的单幂律分布, 幂律指数  $\delta$  从 1.05 到 16, 每步增加 0.05. 计算的相对积分控制精度  $R$  (RERR) 设定为  $10^{-4}$  进行. 图 1 上部是作 1 000 次这样的薄靶光子谱计算所花费的时间, 单位是 s. 从图看到, 初始形式的积分式 (9) 式即版本 1 所花时间随电子谱指数加大而增大. 其它的变换形式均有性能的提高, 除了 (13) 式的变换计算所花的时间基本不随电子谱指数变化外, 其它的均随  $\delta$  增加而增加. 图 1 的下部显示的是初始积分形式所花时间与其它形式所花时间的比值, 值越大性能越好. 从结果看, 积分式 (11) 式的性能比 (10) 式有 ~10% 的提高, 然而它们之间没有本质的区别, 它们对于初始形式积分随电子谱指数的依赖关系基本一致, 所以它们与版本 1 的性能比值随  $\delta$  变化较小, 其数值在 10 左右. 而 (12) 式的性能随  $\delta$  变化很大, 在  $\delta$  较小时, 性能较差;  $\delta$  在 2 到 4.5 范围, 性能很好;  $\delta$  更大时, 积分耗时随电子谱指数缓慢增加, 但始终优于 (10) 式及 (11) 式. 在  $\delta \geq 2$ , (12) 式的性能优于 (10) 式大约 2~3 倍, 但在  $\delta \leq 2$ , 性能可能要比 (10) 式差一倍了. 而 (13) 式的性能是最好的, 在  $\delta \geq 4.5$ , 它的性能优于版本 2 约 5 倍以上, 在小于 4.5 的情形, 相对

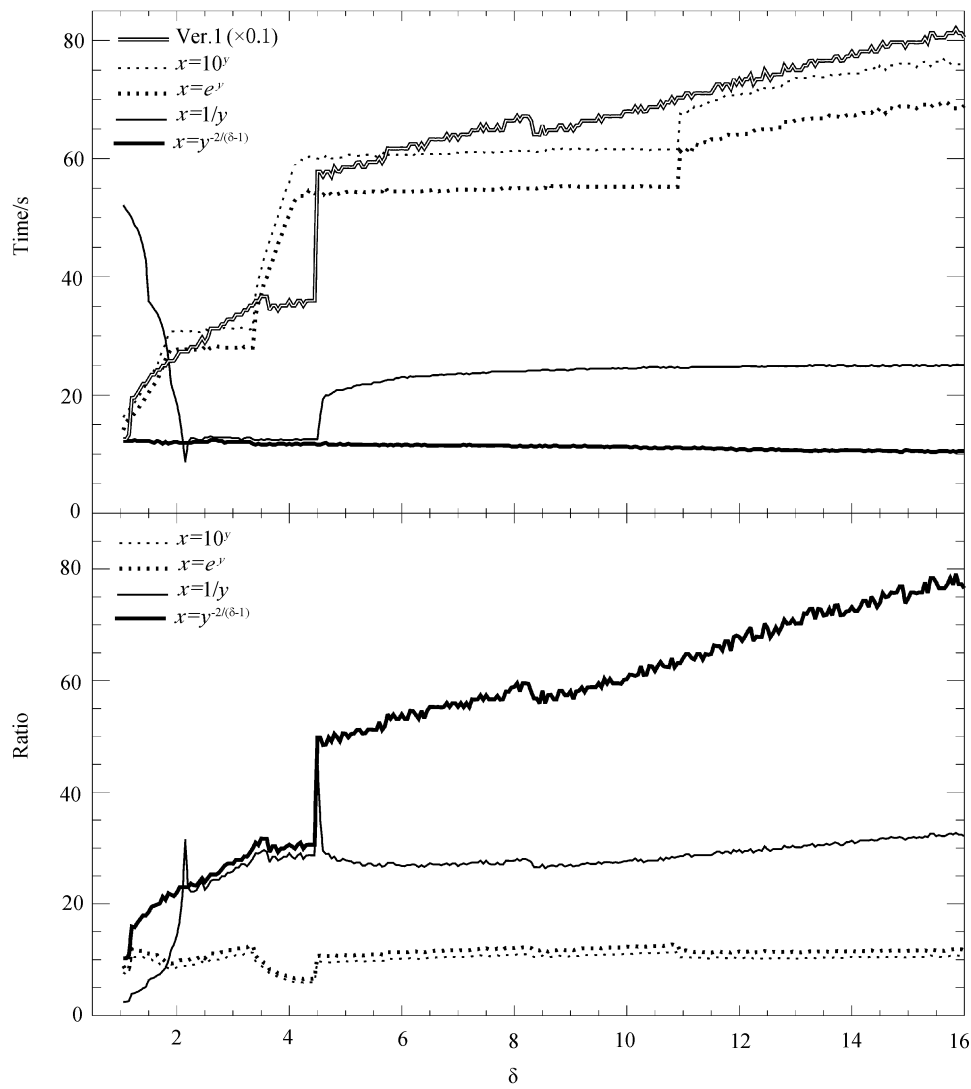


图 1 测试 (9)~(13) 式薄靶积分耗时. 上部: 1 000 次计算同样的谱所花费的时间, 单位 s. 下部: SSW 韧致积分计算版本 1 与其它方案的耗时时间比值

Fig.1 Computational cost tests for Eqs. (9)~(13) (thin-target case). Top: cost times (in units of second) for 1000 tests. Bottom: ratio of times between version 1 and others

版本 2 约好 2~3 倍的性能. 这样的性能可能由于变量代换后的 (13) 式积分变量变化范围小, 在这个小变化范围内, 积分核变化相对其它的形式来得相对简单.

图 2 是关于厚靶计算的耗时对比结果. SSW 中厚靶积分版本 2 的性能主要是由于解析将二重积分降级为一重所获得. 对比薄靶情形, 我们可以大致知道积分降级所获取的性能, 比如, (10) 式薄靶的性能相对于 (9) 式提高约 10 倍, 而厚靶提高约 200 倍, 这样积分降级所得到的性能 ~20 倍. (9)~(12) 式及 (14) 式系列变换的性能随  $\delta$  变化趋势类似于薄靶的情形. (14) 式的耗时性能是最好的, 且在  $\delta > 2.5$  时, 积分耗时基本不随源电子谱指数变化.  $\delta$  在 4~10 之间, (14) 式相对 (10) 式有大约 2~4 倍的性能改善.

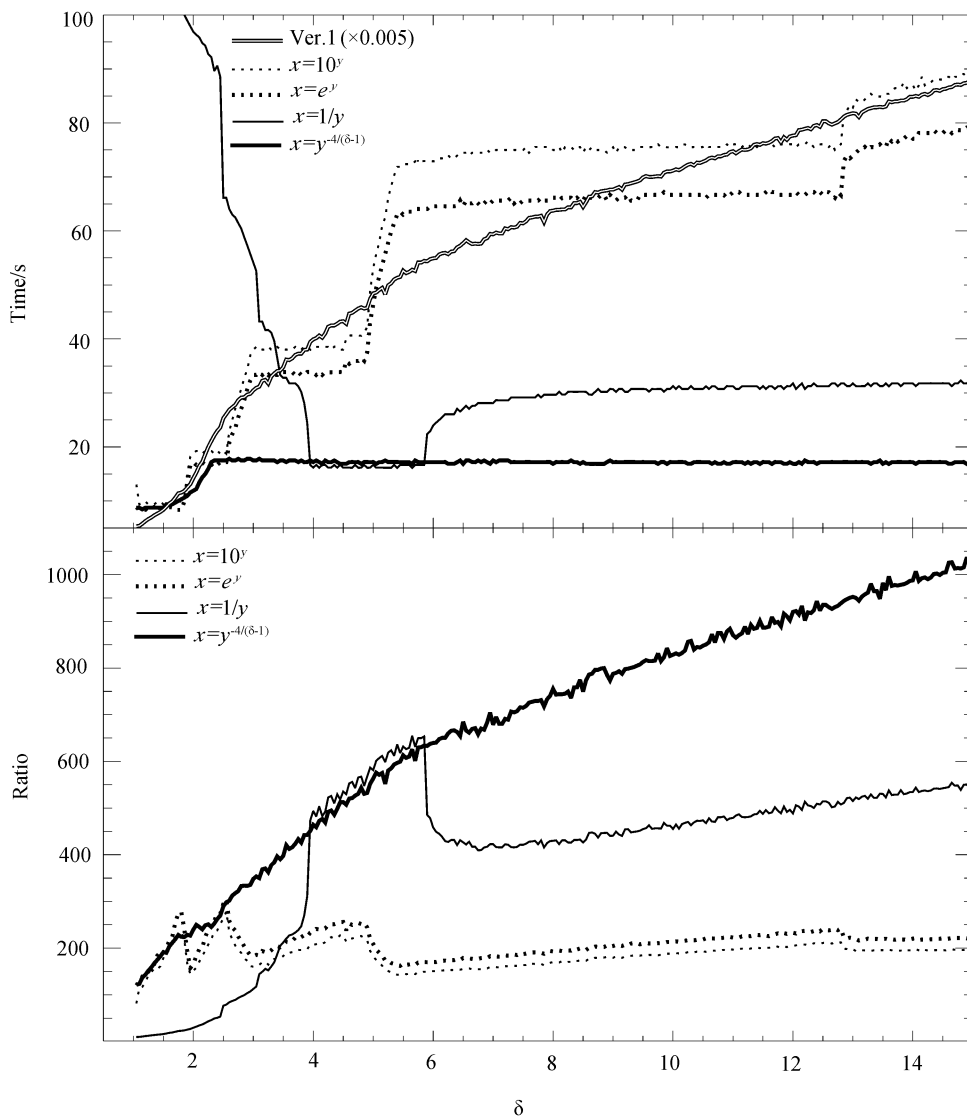


图 2 同图 1, 针对厚靶积分的结果

Fig. 2 The same as Fig. 1 but for the thick-target cases

在上面的测试计算中，我们固定源电子的高能截止为 32 000 keV，但在初始的积分 (1) 式中，积分上限是无穷大，所以当谱指数比较硬时，我们需要积分上限  $b$  到一个较大的值来控制截断误差。图 3 上部是计算薄靶的情形，比较取不同积分上限时几个积分方案的耗时比较。这个测试中，我们取源电子负幂律谱指数为 4。测试结果看到，(13) 式方

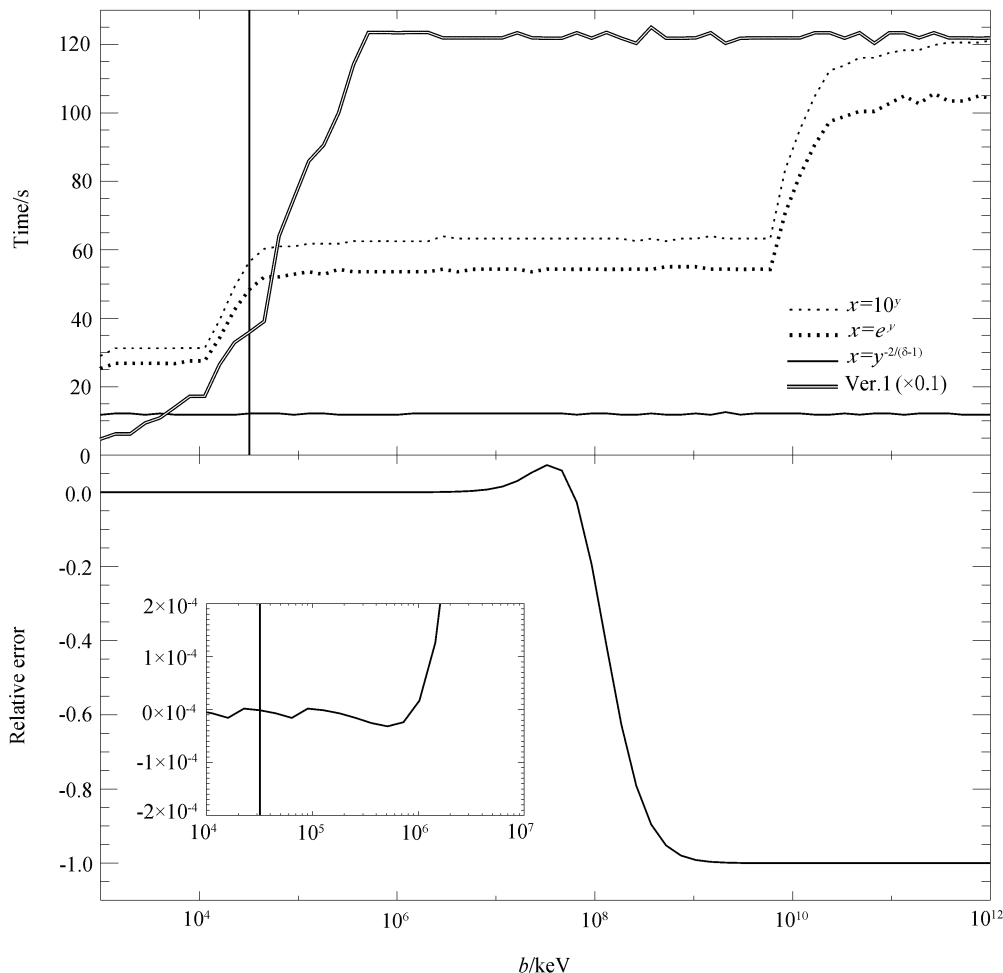


图 3 薄靶积分上限变化测试。竖直线显示 SSW 使用的缺省的积分上限。上部：各种方案不同积分上限对性能的影响。下部：版本 1 方案积分误差随积分上限的变化

Fig. 3 Test for different integral upper limits (thin-target cases). The vertical line labels the default upper limit used by present SSW. Top: Influence of different integral upper limits with different methods on cost times. Bottom: Variation of relative error of version 1 with integral upper limit

案性能最好，积分耗时基本不随积分上限  $b$  变化，而其它的方案随积分上限增加，积分耗时也会增加。最差的是版本 1，单纯从积分耗时随上限  $b$  变化看，在  $b > 10^6$  keV 耗时已经稳定，不再随  $b$  变化。但是这是由于积分迭代次数已经达到程序设定的上限，不再增加了，故表现出稳定的积分耗时。但积分的结果是错误的。我们以 89 keV 光子的流量

为例来讨论积分准确性. 除版本 1 外的 3 种方案的流量结果在缺省的积分控制精度  $10^{-4}$  内总是彼此相符的. 图 3 下部显示的是版本 1 的流量与 (13) 式方案的相对差异. 局部放大的结果表明,  $b \approx 10^6$  keV 时, 差异就超出缺省的积分精度  $10^{-4}$ , 当  $b > 10^9$  keV 后, 差异达 100%. 对于厚靶的计算, 也有类似的结果. (13) 式积分对上限变化不敏感, 这个特性也有不利的一面. 如果积分分为两段来计算的话, 总的时间就会增加. 而 (10) 式或者 (11) 式则可以适当将积分分段, 其总的积分时间反而可能减少. 这样 (13) 式对 (10) 式或者 (11) 式的性能优势变弱. 而通常的源电子谱分布假设是如 (2) 式那样分段的, 积分是分成两段计算. 所以 (13) 式对 (10) 式或者 (11) 式的性能优势可能比图 1 所显示的差.

由于 (13) 式积分方案对积分的上限不再敏感, 这样我们可以适当增加积分上限以避免由于不合适的上限引起的过大的截断误差. 很显然, 上限截断对硬源电子谱产生的能量高的光子的影响大. 图 4 显示谱指数为 2 (对应薄靶, 厚靶  $\delta=3$ ) 的源电子的高能端截断所引起的积分光子谱在 500 keV 处的光子流量的相对截断误差. 从图中看到, SSW 采用的缺省的高能上限是 32 000 keV, 会引入大约 0.1 的截断误差, 这个误差比缺省的积分控制误差 0.000 1 大多了. 而高能上限约为  $10^8$ , 则截断误差可以降到比积分控制误差小. 这里演示的是比较极端的情形, 源电子谱硬, 光子能量高, 对于通常的耀斑 X 光子谱, 截断误差比这里显示的要小.

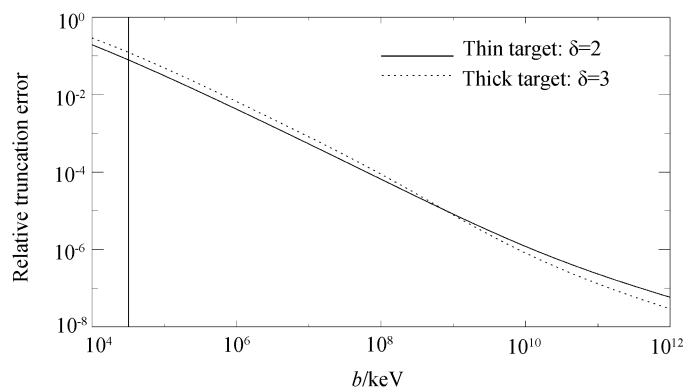


图 4 不同能量电子高能端上限截断引入的 500 keV 光子流量的误差. 竖直线显示 SSW 使用的缺省的高能上限

Fig. 4 The truncation error of 500 keV photon flux caused by different upper limits of electron energy.

The vertical line labels the default upper limit used by present SSW

积分变量代换及预先解析积分降级的方法使韧致积分性能提高很多倍. 现在我们可以不再需要使用近似的韧致辐射截面来作积分计算. 我们使用 3BN 这样精确的韧致截面来替换现在使用的近似截面, 它们之间最大差异约 5.5%<sup>[5]</sup>. 计算结果表明, 使用 3BN 的结果光子流量比近似截面的光子流量小, 依赖于光子能量及电子谱的参数, 数值差异最大小于 4%. 而积分耗费时间比使用近似截面计算多出约 30% (依赖参数). 图 5 显示的是使用这两种不同韧致辐射截面计算 3~10000 keV 光子谱的流量的最大差异. 测试计算的源电子分布是负幂律谱,  $\delta$  从 1.05 变到 16. 测试结果表明, 对于不同的源电子谱指数, 最小的差异都大于 0.001 (对比缺省的积分控制误差 0.000 1), 而最大的差异小于 4%, 这

说明有必要采用更精确的韧致辐射截面来计算韧致积分。

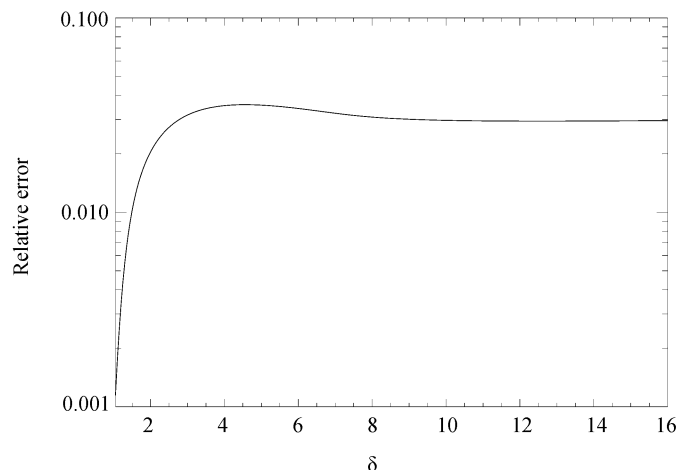


图 5 使用近似韧致截面<sup>[5]</sup>和精确的 3BN<sup>[4]</sup>导致的 3~10000 keV 积分光子谱流量的最大差异

Fig.5 The maximal difference in 3~10000 keV photon flux when using the approximate bremsstrahlung cross-section<sup>[5]</sup> and exact cross-section 3BN<sup>[4]</sup>

我们期望积分在给定的控制精度收敛于正确的值，但有时却不是这样，在某些参数下，积分计算的结果光子谱在某些(个)光子能量处超出，形成尖刺现象。我们测试不同积分控制精度、不同积分方案下得到光子谱是否准确、足够光滑、不存在(明显的)尖刺现象。测试光子谱能量范围 3~300 keV，源电子为单幂律分布，低能截止和高能截止分别为 20 keV 和 32 000 keV， $\delta$  从 1.05 到 16 均匀划分为 300 个数值。图 6 给出这样的薄靶积分光子谱例子。图 6 中的小图是局部放大的结果。图中上部显示的是使用初始版本 1 积分在积分控制精度  $10^{-6}$  下得到的光子谱仍然存在尖刺现象的例子，图的下部显示的是版本 2 积分在积分控制精度  $10^{-5}$  下得到的光子谱存在尖刺的情形例子。更多的测试结果见表 1。

表 1 各种积分方案在不同积分控制精度下结果光子谱出现尖刺的数目及比率

Table 1 The numbers of the consequential photon spectra appeared with spikes and their percentages

RERR	Method			
	Version 1	Version 2	Eq.(13)	Eq.(13) with 3BN
$10^{-1}$	300(100%)	276(92.0%)	0(0%)	0(0%)
$10^{-2}$	300(100%)	238(79.3%)	6(2.0%)	5(1.7%)
$10^{-3}$	300(100%)	193(64.3%)	1(0.3%)	2(0.7%)
$10^{-4}$	251(83.7%)	107(35.7%)	0(0%)	0(0%)
$10^{-5}$	46(15.3%)	15(5.0%)	0(0%)	0(0%)
$10^{-6}$	7(2.3%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
$10^{-7}$	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)

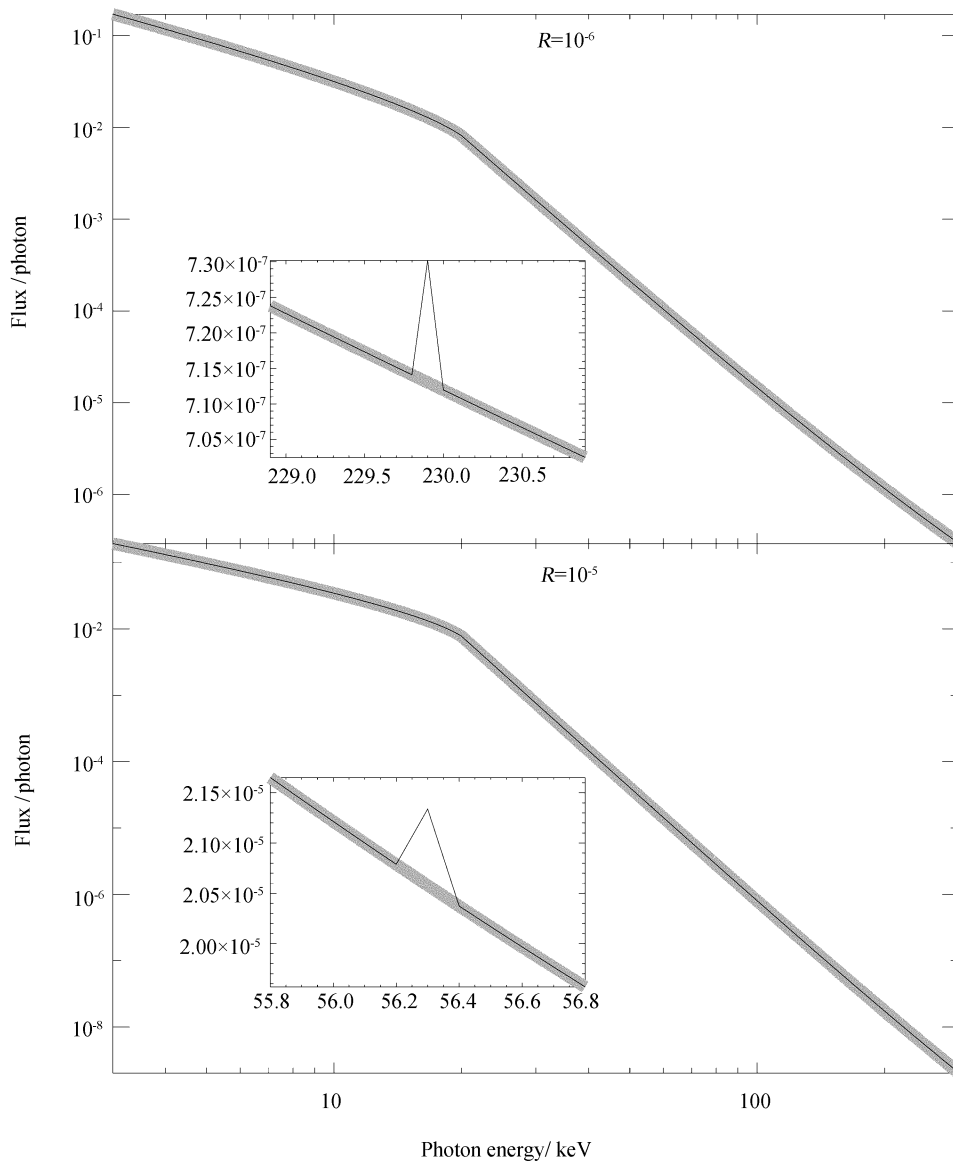


图 6 积分结果光子谱呈现尖刺现象的例子. 粗淡线是 (13) 式方案的积分结果. 上部: 细线是版本 1 在  $R = 10^{-6}$  的积分结果. 下部: 细线是版本 2 在  $R = 10^{-5}$  的积分结果

Fig. 6 The examples of the consequential photon spectrum showing spike shape. The thick gray lines are for the method of Eq.(13). Top: The thin line is for the version 1 with  $R = 10^{-6}$ . Bottom: The thin line is for the version 2 with  $R = 10^{-5}$

表 1 列出的是不同积分方案下结果光子谱存在明显尖刺现象的源电子谱指数的数目及占总测试例子 (300 个) 的比率. 从表 1 我们看到, 对于版本 1 积分方案, 只有在积分控制精度在  $10^{-7}$  才能保证在 3~300 keV 范围内积分结果光子谱是足够光滑的, 消除尖刺现象. 而提高积分控制精度则积分时间就会相应增加. 为了性能, 版本 1 在 2009 年 11 月 24 日前将控制精度设置为  $10^{-3}$ , 而在其后为了抑制尖刺现象, 将其设置为  $10^{-5}$ . 对于版本 2 方案, 缺省的  $10^{-4}$  精度控制并不能保证得到的光子谱完全正确, 有约 35.7% 的光子谱仍然出现尖刺. 即使精度提高到  $10^{-5}$  也不能完全解决问题, 仍然有约 5% 的光子谱存在尖刺, 只有在  $10^{-6}$  才行. 而对于 (13) 式方案, 尖刺现象与前面的方案比, 结果好得多. 只在低精度的情形下才出现尖刺现象, 而且只在源电子谱指数小于 1.4 下才出现尖刺, 这么硬的谱是太阳耀斑不太常见的电子谱分布. 而且在缺省的控制精度  $10^{-4}$ , 就可以完全消除光子谱存在的尖刺现象, 得到光滑的光子谱, 而且 (13) 式若使用精确韧致截面公式的积分有着同样好的性质. 另外, 上面的结论仅仅是针对这里测试的情形, 如果光子能量范围再增大, 则可能更多的光子谱会出现尖刺现象, 但不论如何, (13) 式的韧致积分方案都比其它两种方案要好很多.

## 4 结论及讨论

通过对比几种韧致积分方案, 薄靶 (13) 式及厚靶 (14) 式的积分方案从性能 (耗时) 及精确性 (收敛到正确的值, 避免产生结果光子谱的尖刺现象) 都是最好的方案. 薄靶积分, 在相同的积分控制精度  $10^{-4}$  下, 这个方案的耗时基本不依赖于电子谱指数变化, 当取实际太阳耀斑电子谱指数, 即通常的 3~6 时, 积分性能比版本 1 提高约 25~50 倍, 比版本 2 提高约 2~5 倍. 而且, 积分耗时基本不随积分上限的变大而变化. 由于积分速度的提高, 我们可以考虑使用精确的 3BN 韧致辐射截面, 使得韧致积分更精确, 只是积分时间约增加 30%, 这个耗时增加在积分性能大倍率提高后是可以接受的.

方案 (13) 式及 (14) 式的变换中包含一个  $(\delta-1)$  的分母, 所以对于特别硬的谱 ( $\delta \leq 1.05$ ) 的情形, 就必须采用 (11) 式方案来替换. 而从图 1~2 看到, 在源电子谱非常硬时 ( $\delta \sim 1$ ), (11) 式的性能也是非常好的, 与 (13) 式及 (14) 式差不多.

仔细查看图 1 的上部关于 (12) 式的耗时曲线, 可以看到源电子谱指数在 2 点多的地方存在一个最低值. 这个不是误差, 是真实存在的. 受此启发, 对应于 (13) 式变换, 我们可以取  $\alpha$  为与源电子谱指数相关的值而不是常数 2, 对于源电子谱较硬 ( $\delta < 4$ ) 的积分, 还可以进一步提高积分性能. 但是这个取值同时还依赖源电子谱的其他常数, 比较复杂, 我们的实现方案没有采用这种复杂的形式.

我们改进韧致积分算法, 将性能及准确性都提高很多. 这很重要, 因为在耀斑 X 射线谱的优化拟合过程中这个积分是需要反复调用的. 另外, 积分方案 (13) 式和 (14) 式的性能对使用简单的 Bethe-Heitler 韧致截面的韧致积分也是有效的.

## 参 考 文 献

- [1] Brown J C. SoPh, 1971, 18: 489
- [2] Aschwanden M J. Physics of the Solar Corona. An Introduction. New York: Springer, 2004
- [3] Tandberg-Hanssen E, Emslie A G. The Physics of Solar Flares. Cambridge: Cambridge University Press, 1988
- [4] Koch H W, Motz J W. RvMP, 1959, 31: 920
- [5] Haug E. A&A, 1997, 326: 417
- [6] Brown J C, Kašparová J, Massone A M, et al. A&A, 2008, 486: 1023

## Fast Calculation of Integration of Bremsstrahlung Radiation from Electrons with Power-law Distribution

LI You-ping    GAN Wei-qun

(*Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008*)

**ABSTRACT** The integral numeration of the hard X-ray bremsstrahlung spectrum based on the version 2 in Solar SoftWare (SSW) is developed by us. By comparing the cost times of the integral numeration with four methods, it is showed that the best method is faster than version 2 by about 2 to 5 times. It also shows that in comparison with previous version 1 and 2, the accuracy, the suppression of the spike structure and insensitivity to the upper limit of the integration are improved a lot with the best method. In addition, we test the integral numeration by using the exact bremsstrahlung cross-section instead of the present approximate one, and prove that the cost time is tolerable with our improved method.

**Key words** sun: X rays, gamma rays, sun: flares, methods: numerical