

# ASTROD-GW 时间延迟干涉

王 刚<sup>1,2†</sup> 倪维斗<sup>3,4†</sup>

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

(2 中国科学院研究生院 北京 100049)

(3 上海师范大学联合天体物理中心 上海 200234)

(4 清华大学物理系 新竹 300)

**摘要** ASTROD-GW (ASTROD [Astrodynamical Space Test of Relativity using Optical Devices] optimized for Gravitation Wave detection) 是 ASTROD 专注于引力波探测的优化方案, 组成任务的 3 个航天器分别位于日地拉格朗日点  $L_3$ 、 $L_4$  和  $L_5$  点附近, 组成臂长为  $2.6 \times 10^8$  km 的干涉阵列. 根据优化得到的 ASTROD-GW 20 yr 任务轨道, 利用 CGC2.7 (CGC: Center for Gravitation and Cosmology) 星历, 采用适当数值计算的方法, 对引力波探测中所用到的时间延迟干涉路径进行分析和计算.

**关键词** 引力波, 仪器: 干涉仪, 方法: 数值

**中图分类号:** P 173; **文献标识码:** A

## 1 引言

目前人类所进行的引力波探测活动主要聚焦于利用地面干涉仪探测高频引力波, 使用脉冲星定时实验探测甚低频引力波, 以及为预计能在 2020 年后实现的利用空间引力波探测器探测中低频引力波进行的开发和准备工作.

高频引力波探测主要集中于地面长臂激光干涉仪. TAMA 300 m 臂长干涉仪、GEO 600 m 臂长干涉仪以及千米级激光干涉引力波探测器 LIGO (2 个 4 km 臂长、1 个 2 km 臂长) 和 Virgo 基本上都已达成其原先设计的灵敏度目标. 在 100 Hz 频率附近, LIGO 和 Virgo 的灵敏度均已达到  $10^{-23}$  Hz<sup>-1/2</sup> 量级. 现今, LIGO 和 Virgo 均在进行下一阶段探测器的改造计划, 分别为 AdLIGO 和 AdVirgo, 它们将灵敏度提高 10 倍, 能够探测到的引力波源可以增加约 1 000 倍. LCGT (Large-scale Cryogenic Gravitational wave Telescope) 3 km 低温激光干涉引力波探测器已经开始建造, 第 1 阶段建设室温的探测器, 其灵敏度相当于 AdLIGO 和 AdVirgo, 在第 1 阶段建成、调试、观测后直接改造为低温地下的第 3 代长臂干涉仪<sup>[1]</sup>. 欧洲的第 3 代长臂干涉仪 ET (Einstein Telescope) 已经开始规划. 预计在 5 yr 左右的时间内, 人类可第 1 次直接探测到引力波.

空间引力波探测激光干涉仪 (LISA<sup>[2]</sup>、ASTROD<sup>[3-4]</sup>、ASTROD-GW<sup>[5-7]</sup>、Super-ASTROD<sup>[8]</sup>、DECIGO<sup>[9]</sup> 和 BBO (Big Bang Observer)<sup>[10-11]</sup>) 的信噪比最高, 对于研究

2011-03-14 收到原稿, 2011-04-13 收到修改稿

† gwanggw@gmail.com; weitou@gmail.com

天体物理、宇宙和基本物理是重要的. 激光干涉空间引力波探测器所要面临的一个关键问题是不等长干涉臂所造成的频率噪声 (除 DECIGO 为等臂长 Fabry-Perot 干涉仪外, 其他的空间计划均要面对此问题), 要达成要求的目标灵敏度, 激光频率噪声的消减是必须的. 若能将两束光的时间迟延匹配, 其干涉信号激光频率噪声相减, 则可达成目标. 匹配得越好 (时间迟延差越小), 则噪声能够消减的程度越好. 时间迟延干涉方法在 1997 年被应用于 ASTROD 的相关研究<sup>[12-13]</sup>, 在 1999 年之后被广泛应用于 LISA 的相关研究.

对空间探测器 ASTROD-GW 任务轨道的设计, 建立适当的星历是必须的. 我们在接下来的第 2 节中, 介绍所建立 CGC2.7 星历架构. 在第 3 节中, 我们根据先前的工作, 给出进一步优化的 ASTROD-GW 任务轨道. 在第 4 节, 我们对时间迟延的数值计算方法进行介绍. 第 5 节中, 我们对时间迟延干涉的原理加以解释. 第 6 节中, 我们对已有的第 1 代时间迟延干涉路径进行分析和计算, 并对第 2 代干涉路径进行简单讨论. 最后在第 7 节中, 我们给出结论并进行简短的讨论.

## 2 CGC2.7 行星历表框架

对于轨道设计和时间迟延干涉的数值计算而言, 具有足够精度的行星历表有着至关重要的作用, 我们采用行星历表框架 CGC2.7. 早期的 CGC1.0 在 2000 年建立<sup>[14]</sup>, 随后改进的 CGC2.0 在 2002 年建立<sup>[15]</sup>. 我们在 CGC2.0 星历框架基础上建立的星历框架, 称为 CGC2.7 星历框架. 在星历框架 CGC2.7 中所考虑的主要相互作用包括:

(1) 各主要天体 (太阳、八大行星、冥王星、月球、Ceres、Pallas 和 Vesta) 之间的牛顿和后牛顿相互作用<sup>[16]</sup>.

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{GM_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} + \sum_{j \neq i} m_j (A_{ij} \mathbf{r}_{ij} + B_{ij} \dot{\mathbf{r}}_{ij}), \quad (1)$$

$$A_{ij} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{r_{ij}^3} - (\gamma + 1) \frac{\dot{\mathbf{r}}_{ij}^2}{r_{ij}^3} + \frac{3}{2r_{ij}^5} (\mathbf{r}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j)^2 + G[(2\gamma + 2\beta + 1)M_i + (2\gamma + 2\beta)M_j] \frac{1}{r_{ij}^4} + \sum_{k \neq i, j} GM_k [(2\gamma + 2\beta) \frac{1}{r_{ij}^3 r_{ik}} + (2\beta - 1) \frac{1}{r_{ij}^3 r_{jk}} + \frac{2(\gamma + 1)}{r_{ij} r_{jk}^3} - (2\gamma + \frac{3}{2}) \frac{1}{r_{ik} r_{jk}^3} - \frac{1}{2r_{jk}^3} \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ik}}{r_{ij}^3}], \quad (2)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} [(2\gamma + 2)(\mathbf{r}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{ij}) + \mathbf{r}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j], \quad (3)$$

其中  $\ddot{\mathbf{r}}_i$  表示天体  $i$  在太阳系质心坐标系下的加速度矢量,  $\mathbf{r}_{ij}$  和  $\dot{\mathbf{r}}_{ij}$  分别表示天体  $i$  相对于天体  $j$  的位置和速度矢量,  $r_{ij}$  表示天体  $i$  相对于天体  $j$  的距离,  $M_j$  表示天体  $j$  的质量,  $m_j = GM_j/c^2$ ,  $i, j, k$  表示不同的天体序号. 对于 Einstein 广义相对论, PPN (Parameterized Post-Newtonian) 参数  $\gamma = \beta = 1$ , 同时 (2)~(3) 式中已令坐标规范参数  $\alpha = 0$ , 由此得到相对论的后牛顿加速度改正.

(2) 太阳 2 次带谐和地球 2~4 次带谐对其他天体的作用和对其自身的反作用.

(3) 所选 349 颗 (除 Ceres、Pallas 和 Vesta 以外) 小行星对主要天体的牛顿摄动.

CGC2.7 行星历表使用 4 阶 Runge-Kutta 数值积分方法<sup>[17]</sup>, 主天体的初始状态由喷气动力推进实验室 JPL (Jet Propulsion Laboratory) 的 DE405 星历给出, 349 颗小行星的轨道根数从 Lowell 小行星数据库中得到. 本文中星历的初始时刻选在 JD2461944.0 (2028 年 6 月 21 日 12 时). 星历框架 CGC2.7 关于地球质心在 10 yr 内的计算精度和 DE405 的比较如图 1 所示, 可以看到 10 yr 内 CGC2.7 计算的地球日心距和 DE405 差别在 240 m 以内, 经度和纬度的差别分别在 0.9 mas 和 0.35 mas 以内, 其他太阳系的内行星的相应轨道差均小于此, 星历精度满足 ASTROD-GW 相关计算要求.

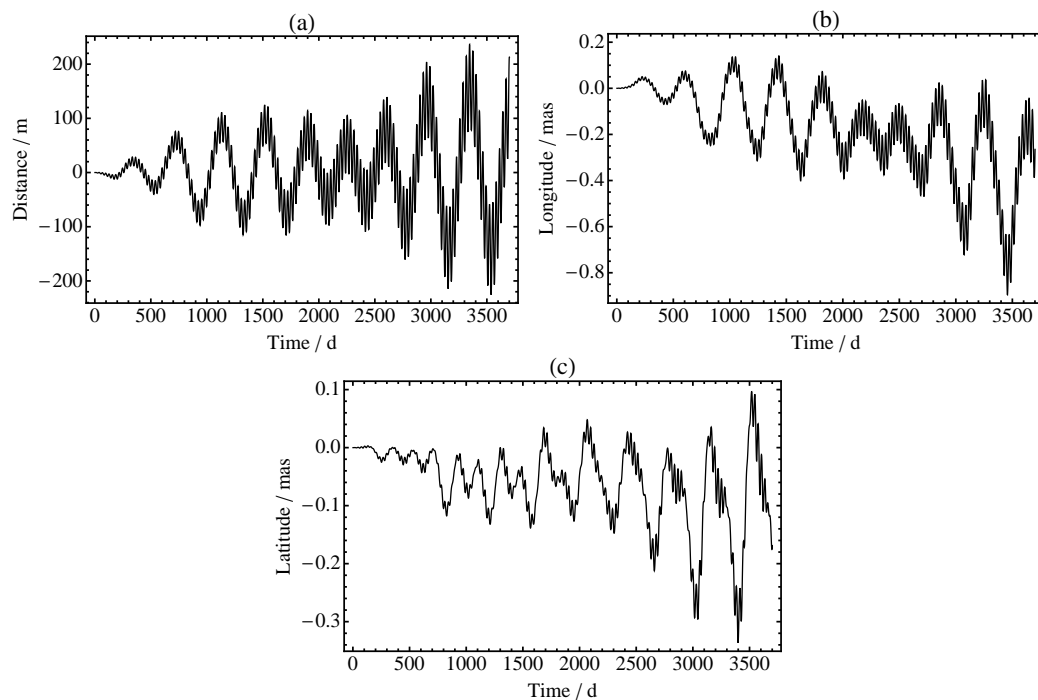


图 1 在日心平赤道坐标系下, CGC2.7 和 DE405 关于地球轨道的日心距 (a)、经度 (b) 和纬度 (c) 偏差, 起始时刻 JD2461944.0

Fig.1 The deviations of the heliocentric distance (a), longitude (b) and latitude (c) of Earth orbit between ephemerides CGC2.7 and DE405 in the heliocentric mean equatorial coordinate system. The initial time is JD2461944.0

### 3 ASTROD-GW 任务轨道

ASTROD-GW 3 个航天器分别位于日地 Lagrange 点  $L_3$ 、 $L_4$ 、 $L_5$  点附近, 为绕日近圆轨道, 近似构成等边三角形, 如图 2 所示, 3 条臂臂长约为  $2.6 \times 10^8$  km (1.732 AU). Lagrange 点  $L_4$ 、 $L_5$  为稳定点, 而  $L_3$  点为不稳定点, 但其不稳定时间尺度为 50 yr 左右, 而预计 ASTROD-GW 的任务时间为 20 yr, 因此能够满足任务轨道的要求, 3 个航天器能够在任务周期内较好地稳定在  $L_3$ 、 $L_4$ 、 $L_5$  点附近.

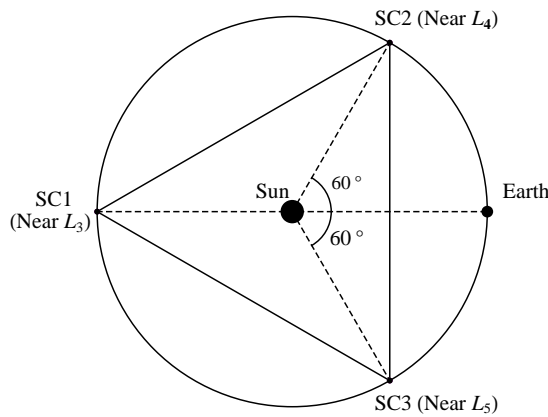


图 2 ASTROD-GW 任务轨道示意图

Fig. 2 Schematic of ASTROD-GW mission orbit

初步将 2028 年 6 月 21 日 12 时 (JD2461944.0) 作为 ASTROD-GW 进入任务轨道的起始时刻. 此时的地球在夏至点附近, 将太阳、地球和航天器在黄道面上的情形视为椭圆型限制性 3 体问题进行求解<sup>[18-20]</sup>, 得到 5 个 Lagrange 点. 初步将航天器入轨的初始位置定在  $L_3$ 、 $L_4$ 、 $L_5$  点的附近, 3 个航天器在日心黄道坐标系下的位置为: SC1 在  $(0, 1 \text{ AU}, 0)$ , SC2 在  $(\sqrt{3}/2 \text{ AU}, -1/2 \text{ AU}, 0)$ , SC3 在  $(-\sqrt{3}/2 \text{ AU}, -1/2 \text{ AU}, 0)$ . 航天器的初始速度按照地球公转周期的 1 个恒星年 (365.256 36 d) 来进行计算, 得到航天器圆周运动的速度大小为  $v_0 = 0.01720209895 \text{ AU/d}$ . 航天器在黄道面上的初始速度矢量垂直于初始位置矢量.  $L_3$  点的航天器初始速度为  $(-v_0, 0, 0)$ ,  $L_4$  和  $L_5$  点航天器初始速度分别为  $(1/2 v_0, \sqrt{3}/2 v_0, 0)$  和  $(1/2 v_0, -\sqrt{3}/2 v_0, 0)$ .

在初步选定航天器的初始条件之后, 我们通过调整航天器轨道的平均周期和轨道偏心率的方法<sup>[19-20]</sup>, 对任务轨道进行优化. 已知行星绕太阳运动的总能量为<sup>[21]</sup>:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{G(M_\odot + m)m}{r} = -\frac{G(M_\odot + m)m}{2a}. \quad (4)$$

行星绕太阳运动的恒星周期为<sup>[21]</sup>:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(M_\odot + m)}}. \quad (5)$$

通过 (4)~(5) 式可以得到速度  $v$  与周期  $T$ 、日心距  $r$  与周期  $T$  变化关系如下:

$$\Delta v \approx -\frac{1}{3} \frac{\Delta T}{T} v, \quad \Delta r \approx \frac{2}{3} \frac{\Delta T}{T} r. \quad (6)$$

同时由 (5) 式可以看出当轨道半长轴  $a$  保持不变时, 轨道周期  $T$  也不会改变, 在优化过程中保持  $\Delta a = 0$ , 可以得到轨道速度和日心距的变化关系如下:

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta r}{r}. \quad (7)$$

在优化过程中, 首先通过 (6) 式中速度与周期、日心距与周期的变化关系, 调整初始速度和日心距, 优化 3 个航天器的轨道周期, 使其接近 1 恒星年. 之后通过 (7) 式中速度与日心距的变化关系, 在保持轨道周期不变的情况下, 进一步调节航天器的初始状态, 优化轨道的偏心率, 使其更加接近圆形轨道.

通过对初选任务轨道周期和偏心率的多次优化, 得到满足 ASTROD-GW 任务轨道的初始条件如表 1 所示, 航天器之间干涉臂臂长、臂长差、干涉臂夹角和 Doppler 相对速度随时间的变化如图 3 所示. 其中 Arm  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 表示航天器  $i$  所对应的干涉臂, Angle  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 表示干涉臂在航天器  $i$  处所构成的夹角. 可以看到 3 条干涉臂的臂长差在 20 yr 内基本保持在  $2.6 \times 10^{-4}$  AU 以内, 而航天器之间连线的相对速度在 20 yr 内基本保持在 3 m/s 以内.

表 1 优化后的航天器初始状态 (JD2461944.0)

Table 1 Initial conditions of spacecraft at epoch JD2461944.0 after optimization

	SC1	SC2	SC3
$x$ (AU)	$1.15400625657 \times 10^{-3}$	$8.67153438990 \times 10^{-1}$	$-8.64862747668 \times 10^{-1}$
$v_x$ (AU/d)	$-1.72003163872 \times 10^{-2}$	$8.60259754371 \times 10^{-3}$	$8.60242121982 \times 10^{-3}$
$y$ (AU)	$9.15289225649 \times 10^{-1}$	$-4.60944670325 \times 10^{-1}$	$-4.60953844061 \times 10^{-1}$
$v_y$ (AU/d)	$4.88112077381 \times 10^{-6}$	$1.36734947884 \times 10^{-2}$	$-1.36634452887 \times 10^{-2}$
$z$ (AU)	$3.96866302001 \times 10^{-1}$	$-1.99803781816 \times 10^{-1}$	$-1.99807759115 \times 10^{-1}$
$v_z$ (AU/d)	$2.07014410548 \times 10^{-6}$	$5.92813611776 \times 10^{-3}$	$-5.92387128798 \times 10^{-3}$

Note: The positions and velocities of 3 spacecraft are calculated in the barycentric mean equatorial coordinate system of the solar system at J2000.0

## 4 时间延迟的计算方法

对于 ASTROD-GW, 光信号从一个航天器到另一航天器所用时间约为 14.5 min. 在航天器之间进行激光干涉模拟时, 为了能够得到在任务周期内任意时刻航天器的坐标, 我们先通过 CGC2.7 星历对航天器 20 yr 任务轨道进行计算, 然后采用 Chebyshev 多项式插值的方法, 得到其任意时刻的状态. 所使用的 Chebyshev 多项式展开到 13 阶, 原始数据取样频率为每天取一组航天器的位置和速度, 插值所采用的位置值和速度值的权重比为 1:0.4, 插值区间长度为 8 d, 插值的精度在  $10^{-14}$  AU 的量级<sup>[22-23]</sup>.

由于航天器之间光束传播的时空并不是完全平直的, 计算的精度要求我们考虑太阳的后牛顿效应所导致的时间延迟修正. 在计算时取太阳质心为坐标系原点, 静止于参考系中的点  $P_1$  和  $P_2$ , 坐标矢量分别为  $\mathbf{R}_1$  和  $\mathbf{R}_2$ . 从  $P_1$  发出一个光信号到  $P_2$ , 光信号的传播时间  $T_{\text{Travel}}$  分为两部分, 一部分是平直时空下计算的时间  $T_{\text{Newton}}$ , 另一部分是后牛顿效应的时间修正  $\Delta T_{\text{PN}}$ .

$$T_{\text{Travel}} = T_{\text{Newton}} + \Delta T_{\text{PN}}. \quad (8)$$

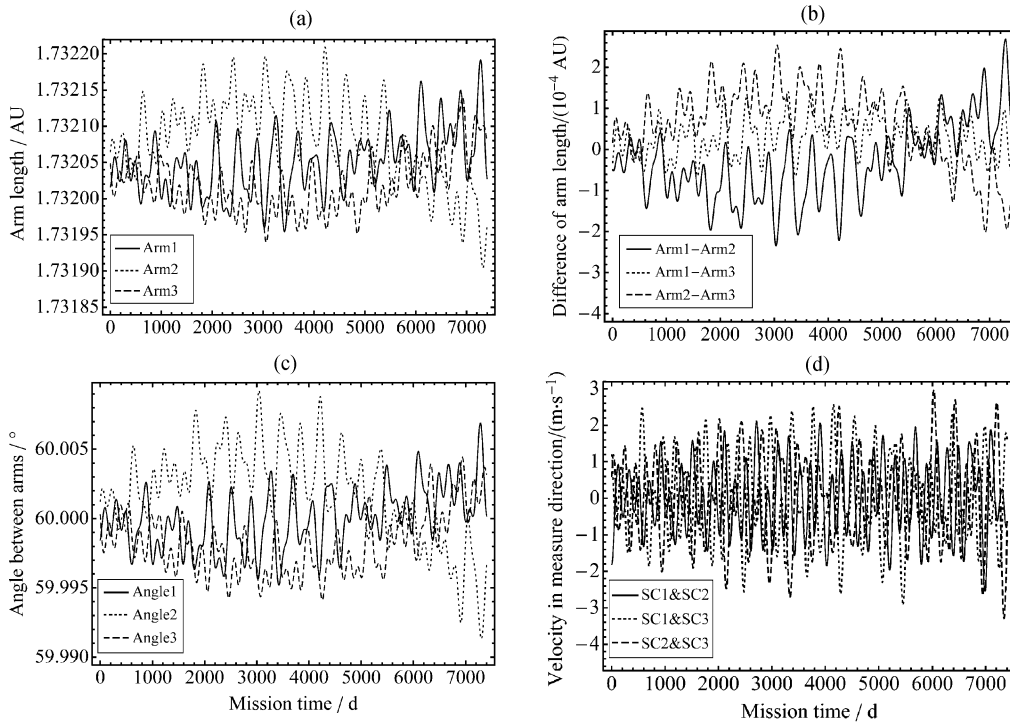


图3 优化的轨道臂长 (a)、臂长差 (b)、臂的夹角 (c)、航天器 Doppler 速度 (d) 随时间的变化

Fig.3 Temporal variations of the arm lengths (a), differences of arm lengths (b), angles between arms (c) and the Doppler velocities in measure direction (d) for our optimized spacecraft orbits

(1) 光在牛顿引力近似下传播时间的计算式为:

$$T_{\text{Newton}} = \frac{R}{c}, \quad (9)$$

(2) PN (Post-Newtonian) 效应所导致时间修正量计算式为<sup>[24-25]</sup>:

$$\Delta T_{\text{PN}} = \frac{2GM}{c^3} \ln\left(\frac{R_1 + R_2 + R}{R_1 + R_2 - R}\right) + \frac{G^2 M^2}{c^5} \frac{R}{R_1 R_2} \left[ \frac{15}{4} \frac{\arccos(\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2)}{|\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2|} - \frac{4}{1 + \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2} \right], \quad (10)$$

其中  $R$  表示  $P1$  和  $P2$  的距离,  $c$  表示光速,  $R_1$  和  $R_2$  分别表示  $P1$  和  $P2$  距离原点的距离,  $\mathbf{N}_1$  和  $\mathbf{N}_2$  分别表示原点指向  $P1$  和  $P2$  的单位矢量.

在计算时间的迟延干涉时, 发射激光信号的航天器的坐标已知, 而接收信号的航天器在不断地移动, 所以需要利用迭代的方法计算光束实际传播的时间<sup>[14,26]</sup>. 假设在  $T_0$  时刻 SC1 发射激光信号到 SC2, SC2 在  $T_0'$  时刻收到信号, 激光传播过程的质心坐标系时

间为  $T_0^r - T_0$ . 迭代计算 SC2 接收信号时刻的方法如下:

$$\begin{cases} T_0^r = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \dots \\ T_1 = \frac{|\mathbf{r}_2(T_0) - \mathbf{r}_1(T_0)|}{c} + \Delta T_{1,\text{PN}} \\ T_1 + T_2 = \frac{|\mathbf{r}_2(T_0 + T_1) - \mathbf{r}_1(T_0)|}{c} + \Delta T_{2,\text{PN}} \\ T_1 + T_2 + T_3 = \frac{|\mathbf{r}_2(T_0 + T_1 + T_2) - \mathbf{r}_1(T_0)|}{c} + \Delta T_{3,\text{PN}} \\ \dots \end{cases}, \quad (11)$$

其中  $\Delta T_{i,\text{PN}}$  表示在第  $i$  次迭代过程中计算的 PN 效应对光传播时间的修正. 进行多次迭代, 直到  $|T_i| < 10^{-11}$  s (3 mm). 航天器在任意时刻的位置  $\mathbf{r}(T)$  的值通过使用 Chebyshev 多项式插值得到.

## 5 时间迟延干涉原理

在实际的空间引力波探测任务当中, 由于航天器轨道的动力学性质, 干涉臂的臂长随时间不断地变化, 需要采用时间迟延干涉的方法使得激光频率噪声相消, 而同时保留引力波信号. 有关时间迟延干涉的方法, 首先是在 ASTROD 任务概念研究中使用<sup>[12-13,27]</sup>. 在 1997 年, 我们提出下列两种时间迟延干涉方案<sup>[12]</sup>:

(1) Path 1: SC3 → SC1 → SC3 → SC2 → SC3; Path 2: SC3 → SC2 → SC3 → SC1 → SC3

(2) Path 1: SC3 → SC1 → SC2 → SC3; Path 2: SC3 → SC2 → SC1 → SC3

激光在锁相放大, 经过 Path 1 和 Path 2 后在 SC3 中产生干涉.

以上方案在后来空间引力波探测计划 LISA 时间迟延干涉的方案中, 被归为第 1 代. 加州理工学院 JPL 的 Tinto 等人对第 2 代的时间迟延干涉的方法进行研究, 得到能够更好相消的第 2 代时间迟延干涉方法<sup>[28]</sup>.

由于在空间干涉仪中发射器和接收器相距比较远, 到达接收器的激光需要经过放大后, 才能传回或传至其他接收器. 所采用的放大方法为本地激光与传入的弱光锁相然后射出. 在弱光锁相的研发当中, 清华大学(新竹)首先在 2000 年能够对 2 pW 的入射光锁相<sup>[29-30]</sup>. 加州理工学院 JPL 在 2008 年, 进一步能对 40 fW 的入射光锁相<sup>[31]</sup>.

现在我们用上述 (1) 的例子说明激光噪声的消减. 下面我们按 Tinto 等<sup>[32]</sup> 的综述论文说明. 对于非等臂长的 Michelson 干涉仪, 如图 4 所示, 两条干涉臂的臂长分别为  $L_1$ 、 $L_2$ . 干涉光束在出射时分为两束分别通过两条干涉臂, 返回的光束与各自的出射的光束进行干涉合成, 在光探测器处得到各自的干涉结果, 分别将其记为  $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ , 将  $C(t)$  表示为在  $y_1$ 、 $y_2$  中的激光频率噪声随时间变化的随机过程. 同时用  $h_1(t)$ 、 $h_2(t)$  记为引力波进入各自的测量结果, 而将  $n_1(t)$ 、 $n_2(t)$  记作其他残留在  $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$  中的噪声.

测量的  $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$  写为

$$y_1(t) = C(t - 2L_1) - C(t) + h_1(t) + n_1(t), \quad (12)$$

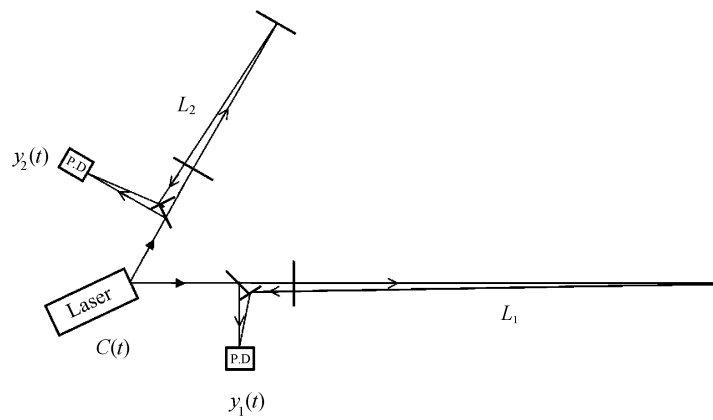


图 4 非等臂长干涉仪

Fig. 4 The unequal-arm interferometer

$$y_2(t) = C(t - 2L_2) - C(t) + h_2(t) + n_2(t). \quad (13)$$

在(12)~(13)式中,干涉臂1处光探测器,在 $t$ 时刻入射的激光信号中包含有 $2L_1$ (光速 $c=1$ )之前的噪声 $C(t-2L_1)$ ,从中减去 $t$ 时刻即时的噪声 $C(t)$ .对于干涉臂2同样包含噪声 $C(t-2L_2)$ .比较两者的测量结果,将两式相减可以得到(14)式.

$$y_1(t) - y_2(t) = C(t - 2L_1) - C(t - 2L_2) + h_1(t) - h_2(t) + n_1(t) - n_2(t). \quad (14)$$

如果进行时间的平移:将 $y_1(t)$ 平移到 $2L_2$ 之前,即 $y_1(t-2L_2)$ ;将 $y_2(t)$ 平移到 $2L_1$ 之前,即 $y_2(t-2L_1)$ ,比较两者测量的差值,得到(15)式.

$$y_1(t-2L_2) - y_2(t-2L_1) = C(t-2L_1) - C(t-2L_2) + h_1(t-2L_2) - h_2(t-2L_1) + n_1(t-2L_2) - n_2(t-2L_1). \quad (15)$$

比较(14)和(15)两式可以看到两方程中具有相同的激光频率噪声.通过用(14)式减去(15)式,可以得到一个不含激光频率噪声 $C(t)$ 的新数据:

$$\begin{aligned} X &\equiv [y_1(t) - y_2(t)] - [y_1(t-2L_2) - y_2(t-2L_1)] \\ &= h_1(t) - h_2(t) + n_1(t) - n_2(t) - \\ &\quad [h_1(t-2L_2) - h_2(t-2L_1) + n_1(t-2L_2) - n_2(t-2L_1)]. \end{aligned} \quad (16)$$

由上述 $X$ 的组合表达式,我们可以看到通过在时域的范围进行适当的时间变换和对所记录的不同的干涉测量结果进行组合,使得消除激光频率噪声变得可行.这就是时间延迟干涉的本质所在.在动态干涉的情况下仍有光程差,但其差减小时,激光频率噪声虽不为零,但仍然可以减小.

## 6 时间延迟干涉的计算

为了便于讨论,我们将 3 个航天器的干涉臂进行标号: 航天器  $i$  所对应的干涉臂为  $L_i$ 、 $L_{i'}$ , 顺时针方向依次分别为  $L_{1'}$ 、 $L_{2'}$ 、 $L_{3'}$ , 逆时针方向依次分别为  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ . 如图 5 所示. 使用  $y_{ij}$  表示在航天器  $j$  测量的来自航天器  $i$  的激光相位变化.

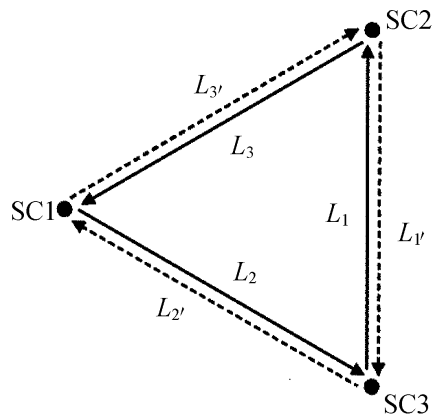


图 5 航天器及其臂长的标号

Fig. 5 Labels of spacecraft and their arms

### 6.1 第 1 代时间延迟干涉

第 1 代时间延迟干涉的目标在于: 通过一定的干涉路径, 消除静态的臂长差<sup>[33]</sup>. 因此在此处的分析中先将臂长认为是静态的, 且光速  $c = 1$ , 使用逗号表示时间的延迟,  $y_{ij,k} = y_{ij}(t - L_k)$ ,  $y_{ij,kr} = y_{ij}(t - L_k - L_r)$ . 因为臂长是静态的, 所以逗号后面的延迟的时间可以交换.

第 1 代的时间延迟干涉包括的类型<sup>[28,33]</sup>有: Sagnac ( $\alpha, \beta, \gamma$ )(即第 5 节中的第 (2) 例), Unequal-arm Michelson ( $X, Y, Z$ )(即第 5 节中的第 (1) 例), Relay ( $U, V, W$ ), Beacon ( $P, Q, R$ ) 和 Monitor ( $E, F, G$ ), 其各自的干涉路径如图 6 所示. 每种类型根据航天器的起始点不同分别有 3 个子类型.

以 Sagnac ( $\alpha$ ) 为例, 介绍分析计算的过程. Sagnac ( $\alpha$ ) 使用全部的干涉臂, 其干涉路径如图 6 中所示. 干涉使用两束激光, 光束  $\alpha$ -Beam1 从航天器 SC1 出发, 依次经过航天器 SC3 和 SC2 之后回到 SC1; 光束  $\alpha$ -Beam2 从航天器 SC1 出发, 依次经过航天器 SC2 和 SC3 之后回到 SC1. 两束激光在航天器 SC1 进行干涉. 两束激光干涉的计算表达式如 (17) 式<sup>[33]</sup>, 具体的过程表示为 (18) 式. 在计算当中, 使用通过  $\alpha$ -Beam1 的时间  $L_{2,13} + L_{1,3} + L_3$  减去通过  $\alpha$ -Beam2 的时间  $L_{3',1'2'} + L_{1',2'} + L_{2'}$  得到时间差  $\Delta t$ , 即 (19) 式. Sagnac ( $\alpha$ ) 的计算结果如图 7 所示. 由于 Sagnac 效应的影响, 此时的计算结果并不理想, 在之后的分析中, 我们会通过对 Sagnac 干涉类型的改进得到较为理想的结果.

$$\alpha = y_{13,13} + y_{32,3} + y_{21} - y_{31} - y_{23,2'} - y_{12,1'2'} . \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \alpha - \text{Beam1} : & \quad \text{SC1} \xrightarrow{L_2} \text{SC3} \xrightarrow{L_1} \text{SC2} \xrightarrow{L_3} \text{SC1} \parallel t, \\ \alpha - \text{Beam2} : & \quad \text{SC1} \xrightarrow{L_{3'}} \text{SC2} \xrightarrow{L_{1'}} \text{SC3} \xrightarrow{L_{2'}} \text{SC1} \parallel t, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Delta t_\alpha = L_{2,13} + L_{1,3} + L_3 - L_{2'} - L_{1',2'} - L_{3',1'2'}. \quad (19)$$

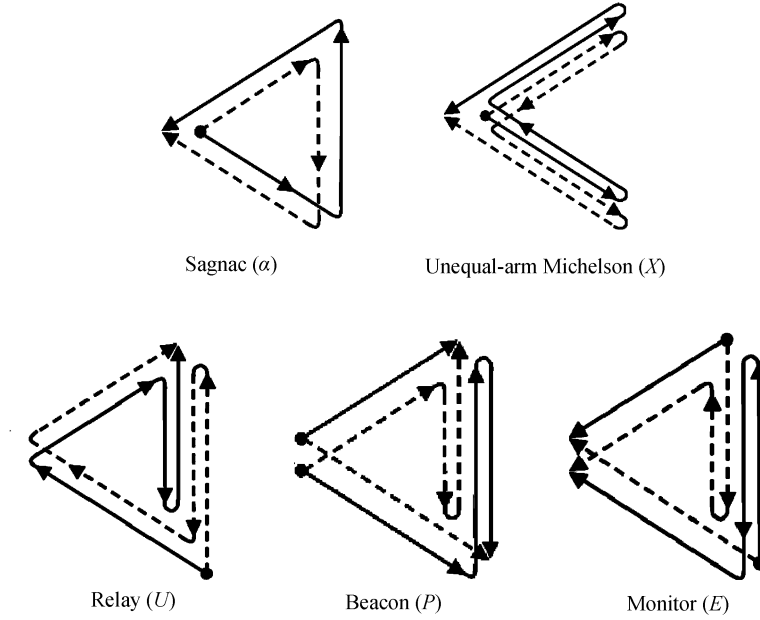
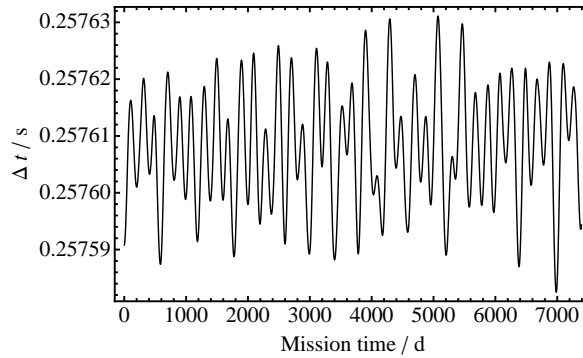


图 6 第 1 代延迟干涉路径

Fig. 6 Interference paths of the first generation

图 7 Sagnac ( $\alpha$ ) 干涉数值计算结果Fig. 7 Numerical results for Sagnac ( $\alpha$ ) interferometry

通过已有的第 1 代干涉表达式<sup>[28,33–36]</sup>, 得到第 1 代中 Unequal-arm Michelson ( $X$ )、Relay ( $U$ )、Beacon ( $P$ ) 和 Monitor ( $E$ ) 延迟干涉的计算式 (20) 式, 结果如图 8 所示.

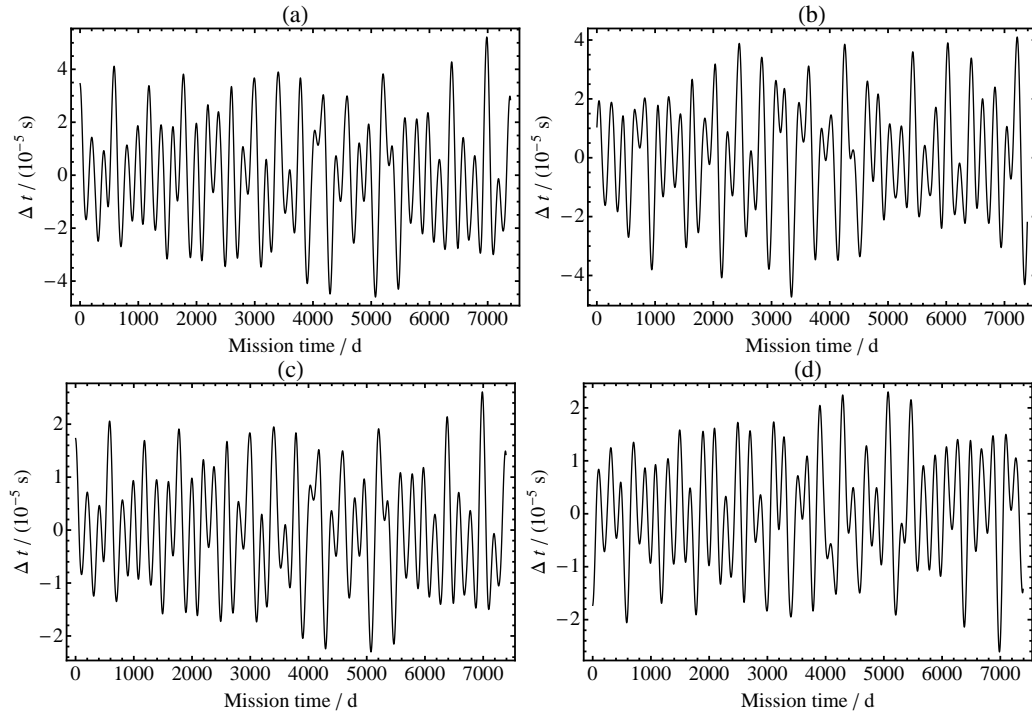


图 8 第 1 代延迟干涉路径数值计算结果. (a) 为 Unequal-arm Michelson ( $X$ ) 的结果, (b) 为 Relay ( $U$ ) 的计算结果, (c) 为 Beacon ( $P$ ) 的计算结果, (d) 为 Monitor ( $E$ ) 的计算结果

Fig. 8 Numerical results for the first generation interferometries. (a) Unequal-arm Michelson ( $X$ ), (b) Relay ( $U$ ), (c) Beacon ( $P$ ), (d) Monitor ( $E$ )

$$\begin{aligned}
 \Delta t_X &= L_{3',322'} + L_{3,22'} + L_{2,2'} + L_{2'} - L_3 - L_{3',3} - L_{2',3'3} - L_{2,2'3'3}, \\
 \Delta t_U &= L_{2',3'1'1} + L_{3',1'1} + L_{1',1} + L_1 - L_{3'} - L_{2',3'} - L_{1',2'3'} - L_{1,1'2'3'}, \\
 \Delta t_P &= L_{3',1'12} + L_{1',12} + L_{1,2} - L_{3',2} + L_{2,3'} - L_{1',3'} - L_{1,1'3'} - L_{2,11'3'}, \\
 \Delta t_E &= L_{1',13} + L_{1,3} + L_3 - L_{2'} - L_{1',2'} - L_{1,1'2'} + L_{2',1'1} - L_{3,11'}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

## 6.2 第 2 代时间延迟干涉

从第 1 代时间延迟干涉的数值结果来看, 对于 ASTROD-GW 要求的 500 ns (150 m) 之内是不够的, 这需要对第 2 代的时间延迟干涉进行分析和计算. 第 2 代时间延迟干涉的目标在于: 能够消除航天器所具有的相同的相对运动速度. 我们在接下来的内容当中, 对已有的第 1 代的干涉路径进行适当的拼接<sup>[36]</sup>, 构造形成第 2 代干涉路径, 并对其数值计算.

以 Sagnac ( $\alpha$ ) 类型为例, 解释由第 1 代干涉路径构造第 2 代干涉路径的过程. 如 (18) 式所示, 当沿  $\alpha$ -Beam1 的光束在  $t$  时刻到达 SC1 后, 我们可以以  $t$  时刻为起点, 沿时间的负方向计算  $\alpha$ -Beam2 过程所用的时间, 由此得到的负的时间加在  $\alpha$ -Beam1 的时间上面, 从而得到时间差  $\Delta t$ . 如果使用 “ $\rightarrow$ ” 表示计算沿时间的正方向, 用 “ $\leftarrow$ ” 表示计

算沿时间的负方向, 所经过的干涉臂标号使用数字  $i$  和  $i'$  ( $i = 1, 2, 3; i' = 1, 2, 3$ ) 表示, 于是可以将 Sagnac ( $\alpha$ ) 的干涉过程的计算表示为 (21) 式, 同时将其结果记为  $\Delta t_{\alpha}^{+}$ .

$$\overrightarrow{213} \overleftarrow{2'1'3'} : \Delta t_{\alpha}^{+} = L_{2,13} + L_{1,3} + L_3 - L_{2'} - L_{1',2'} - L_{3',1'2'}. \quad (21)$$

接下来可以进一步考虑到, 当所通过的干涉臂的次序进行反转的时候, 可以得到一个时间差正负相反的结果, 如 (22) 式所示, 将其结果记为  $\Delta t_{\alpha}^{-}$ .

$$\overrightarrow{3'1'2'} \overleftarrow{312} : \Delta t_{\alpha}^{-} = L_{3',1'2'} + L_{1',2'} + L_{2'} - L_3 - L_{1,3} - L_{2,13}. \quad (22)$$

从以上两式可以容易看到, 如果将  $\Delta t_{\alpha}^{+}$  和  $\Delta t_{\alpha}^{-}$  相加, 得到的结果为 0, 然而以上两式直接相加, 从时间结构上来讲没有实质的物理意义. 但是如果将  $\overrightarrow{213} \overleftarrow{2'1'3'}$  和  $\overrightarrow{3'1'2'} \overleftarrow{312}$  两条路径以适当形式归到 1 条干涉路径, 可以使得光程差变得更小.

如何将两条第 1 代的干涉路径归为 1 条干涉路径是我们接下来要解决的问题. 原有的 Sagnac ( $\alpha$ ) 干涉路径为  $\overrightarrow{213} \overleftarrow{2'1'3'}$ , 此处我们将其命名为  $\alpha^{+}$ , 经过反转变换得到干涉路径  $\overrightarrow{3'1'2'} \overleftarrow{312}$  将其命名为  $\alpha^{-}$ . 如果我们在干涉路径  $\alpha^{+}$  中的某航天器处接入路径  $\alpha^{-}$ , 如 (23) 式所示, 在路径  $\alpha^{+}$  的航天器 1 处 (式中用下标表示), 接入路径  $\alpha^{-}$ , 得到新的干涉路径, 将其命名为  $\alpha_{12-1}$ , (23) 式用方括号标出接入的路径, 计算的光程差结果如图 9 中所示. 可以看到新的干涉路径的光程差比第 1 代的干涉路径的光程差大大降低.

$$\overrightarrow{213_1} \overleftarrow{2'1'3'_1} + \overrightarrow{3'1'2'_1} \overleftarrow{312_1} \Rightarrow \overrightarrow{213[3'1'2'] \overleftarrow{312]} 2'1'3' (\alpha_{12-1}). \quad (23)$$

我们再将反转得到的以 SC1 为起点和终点的路径  $\overrightarrow{3'1'2'} \overleftarrow{312}$ , 经过变换得到以 SC2 为起点和终点的路径  $\overrightarrow{1'2'} \overleftarrow{312} \overrightarrow{3'}$ , 和以 SC3 为起点和终点的路径  $\overrightarrow{2'} \overleftarrow{312} \overrightarrow{3'1'}$ , 由此得到的路径的光程差计算式并不会与 (22) 式有实质的不同. 将变换后得到的路径接入  $\alpha^{+}$  中对应的航天器处, 得到第 2 代的干涉路径, 分别将其命名为  $\alpha_{12-2}$  和  $\alpha_{12-3}$ , 如 (24) 式所示. 给出路径  $\alpha_{12-1}$ 、 $\alpha_{12-2}$  和  $\alpha_{12-3}$  中最好和最差的数值计算结果如图 9 所示.

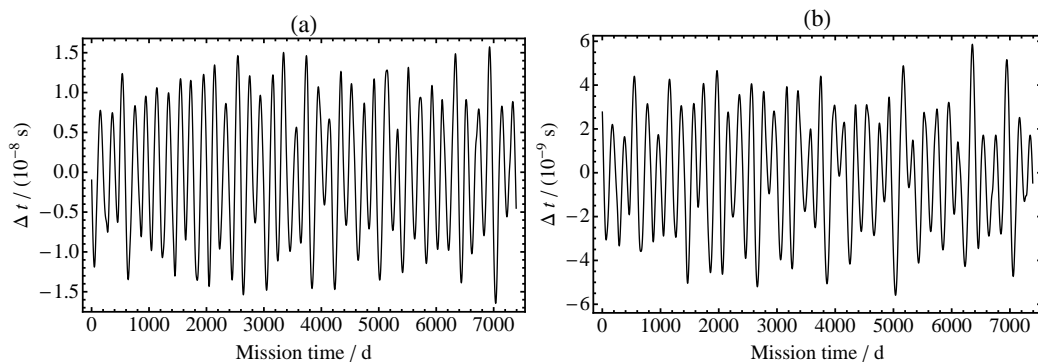


图 9 Sagnac ( $\alpha$ )-type 的计算结果. (a) 和 (b) 分别为  $\alpha_{12-1}$  和  $\alpha_{12-2}$  的数值计算结果

Fig. 9 Numerical results for the Sagnac ( $\alpha$ )-type interferometry. Figs.(a) & (b) are, respectively, numerical results of  $\alpha_{12-1}$  and  $\alpha_{12-2}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{21_2 3} \overleftarrow{2'1'3'} + \overrightarrow{21'2'} \overleftarrow{312} \overrightarrow{3'_2} &\Rightarrow \overrightarrow{21[1'2'} \overleftarrow{312} \overrightarrow{3']3} \overleftarrow{2'1'3'} \quad (\alpha 12-2), \\ \overrightarrow{2_3 13} \overleftarrow{2'1'3'} + \overrightarrow{3_2'} \overleftarrow{312} \overrightarrow{3'1'_3} &\Rightarrow \overrightarrow{2[2'} \overleftarrow{312} \overrightarrow{3'1']13} \overleftarrow{2'1'3'} \quad (\alpha 12-3). \end{aligned} \quad (24)$$

通过 (21) 式的表述方式, 可以将 Unequal-arm Michelson ( $X$ )、Relay ( $U$ )、Beacon ( $P$ ) 和 Monitor ( $E$ ) 表述为相应的形式, 如 (25) 式所示.

$$\begin{aligned} \text{Unequal-arm Michelson } (X) &: \overrightarrow{3'322'} \overleftarrow{33'2'2}, \\ \text{Relay } (U) &: \overrightarrow{2'3'1'1} \overleftarrow{3'2'1'1}, \\ \text{Beacon } (P) &: \overrightarrow{3'1'1} \overleftarrow{3'} \overrightarrow{2} \overleftarrow{1'12}, \\ \text{Monitor } (E) &: \overrightarrow{1'13} \overleftarrow{2'1'1} \overrightarrow{2'} \overleftarrow{3}. \end{aligned} \quad (25)$$

利用 Sagnac ( $\alpha$ ) 的连接方法, 根据已有第 1 代干涉路径, 构造相应的第 2 代干涉路径, 并对所产生的第 2 代干涉路径进行数值计算. Unequal-arm Michelson ( $X$ )、Relay ( $U$ )、Beacon ( $P$ ) 和 Monitor ( $E$ ) 的构造结果如 (26)~(29) 式所示, 相应的数值计算结果如图 10~13 所示.

Michelson ( $X$ )-type:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{3'322'} \overleftarrow{33'2'2} \\ \overrightarrow{22'3'3} \overleftarrow{2'233'} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{X16-1: } \overrightarrow{3'322'} \overleftarrow{[22'3'3} \overrightarrow{2'233']} \overleftarrow{33'2'2}, \\ \text{X16-2: } \overrightarrow{3'322'} \overleftarrow{[3'3} \overrightarrow{2'233'} \overrightarrow{22']} \overleftarrow{33'2'2}, \\ \text{X16-3: } \overrightarrow{22'3'3} \overleftarrow{[22'} \overrightarrow{33'2'2} \overrightarrow{3'3]} \overleftarrow{2'233'}. \end{cases} \quad (26)$$

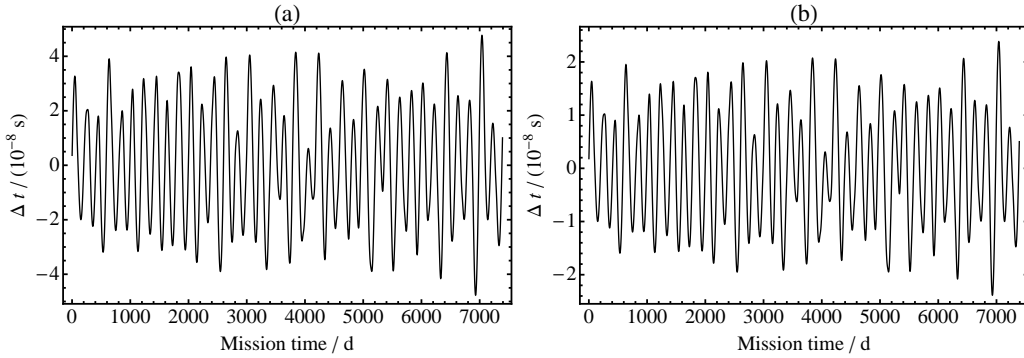


图 10 Michelson ( $X$ )-type 的计算结果. (a) 和 (b) 分别为 X16-1 和 X16-2 的数值计算结果

Fig. 10 Numerical results for the Michelson ( $X$ )-type interferometry. Figs.(a) & (b) are, respectively, numerical results of X16-1 and X16-2

Relay ( $U$ )-type:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{2'3'1'1} \overleftarrow{3'2'1'1} \\ \overrightarrow{11'2'3'} \overleftarrow{11'3'2'} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{U16-1: } \overrightarrow{2'3'1'1} \overleftarrow{3'2'1'[3'2'} \overrightarrow{11'2'3'} \overleftarrow{11'}]1}, \\ \text{U16-2: } \overrightarrow{2'3'1'1} \overleftarrow{3'2'[11'2'3'} \overrightarrow{11'3'2'}]1'1}, \\ \text{U16-3: } \overrightarrow{2'3'1'1}[1'2'3'} \overleftarrow{11'3'2'} \overrightarrow{1}] \overleftarrow{3'2'1'1}. \end{cases} \quad (27)$$

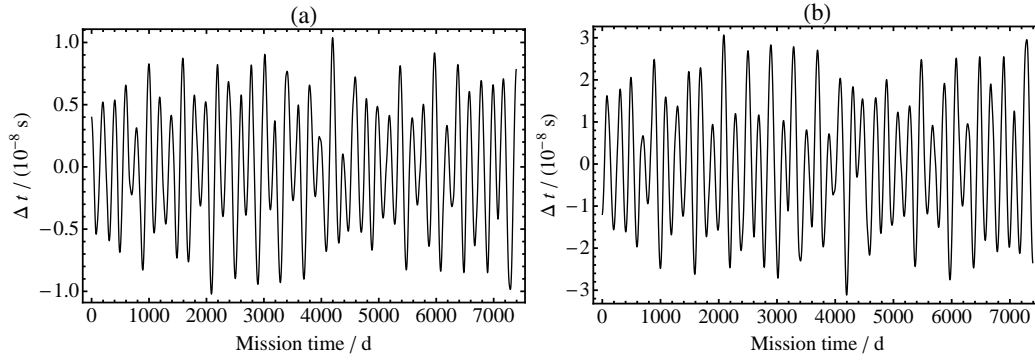


图 11 Relay ( $U$ )-type 的计算结果. (a) 和 (b) 分别为 U16-1 和 U16-3 的数值计算结果

Fig. 11 Numerical results for the Relay ( $U$ )-type interferometry. Figs.(a) & (b) are, respectively, numerical results of U16-1 and U16-3

Beacon ( $P$ )-type:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{3'1'1} \overleftarrow{3'} \overrightarrow{2} \overleftarrow{1'12} \\ \overrightarrow{211'} \overleftarrow{2} \overrightarrow{3'} \overleftarrow{11'3'} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{P16-1: } \overrightarrow{3'1'1}[1' \overleftarrow{2} \overrightarrow{3'} \overleftarrow{11'3'} \overrightarrow{21}] \overleftarrow{3'} \overrightarrow{2} \overleftarrow{1'12}, \\ \text{P16-2: } \overrightarrow{211'}[1 \overleftarrow{3'} \overrightarrow{2} \overleftarrow{1'12} \overrightarrow{3'1'}] \overleftarrow{2} \overrightarrow{3'} \overleftarrow{11'3'}, \\ \text{P16-3: } \overrightarrow{211'} \overleftarrow{2} [\overrightarrow{3'1'1} \overleftarrow{3'} \overrightarrow{2} \overleftarrow{1'12}] \overrightarrow{3'} \overleftarrow{11'3'}. \end{cases} \quad (28)$$

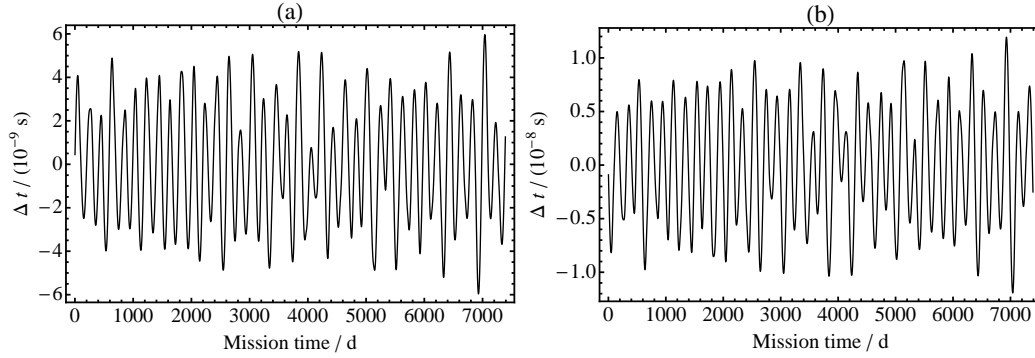


图 12 Beacon ( $P$ )-type 的计算结果. (a) 和 (b) 分别为 P16-1 和 P16-3 的数值计算结果

Fig. 12 Numerical results for the Beacon ( $P$ )-type interferometry. Figs.(a) & (b) are, respectively, numerical results of P16-1 and P16-3

Monitor ( $E$ )-type:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{1'13} \overleftarrow{2'1'1} \overrightarrow{2'} \overleftarrow{3} \\ \overrightarrow{3} \overleftarrow{2'} \overrightarrow{11'2'} \overleftarrow{311'} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{E16-1: } 1[\overrightarrow{1'13} \overleftarrow{2'1'1} \overrightarrow{2'} \overleftarrow{3}] \overrightarrow{1'2'} \overleftarrow{311'} \overrightarrow{3} \overleftarrow{2'}, \\ \text{E16-2: } 1'[\overrightarrow{11'2'} \overleftarrow{311'} \overrightarrow{3} \overleftarrow{2'}] \overrightarrow{13} \overleftarrow{2'1'1} \overrightarrow{2'} \overleftarrow{3}, \\ \text{E16-3: } 11'2'[\overleftarrow{3} \overrightarrow{1'13} \overleftarrow{2'1'1} \overrightarrow{2'}] \overleftarrow{311'} \overrightarrow{3} \overleftarrow{2'}. \end{cases} \quad (29)$$

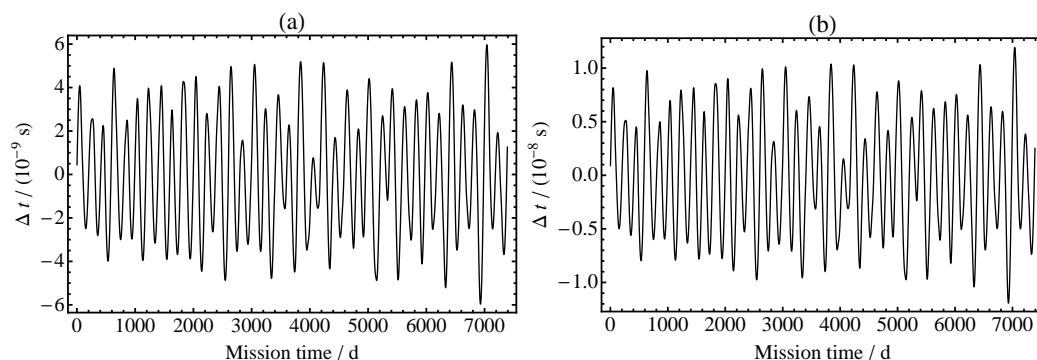


图 13 Monitor (*E*)-type 的计算结果. (a) 和 (b) 分别为 E16-1 和 E16-3 的数值计算结果

Fig. 13 Numerical results for the Monitor (*E*)-type interferometry. Figs.(a) & (b) are, respectively, numerical results of E16-1 and E16-3

## 7 结束语

ASTROD-GW 对于干涉路径差的要求是在 500 ns (150 m) 之内, 第 2 代干涉路径的数值结果均满足要求. 实验上, ASTROD-GW 需要演示满足路径差的要求后, 噪声亦能满足要求. 2010 年加州理工学院 JPL 的 de Vine 等<sup>[37]</sup> 在实验室演示了 LISA 时间延迟干涉的实验实现, 通过时间延迟干涉可以将激光频率噪声降低约  $10^9$  倍, 并将钟的相位噪声降低  $6 \times 10^4$  倍, 恢复了系统在实验室试台上的固有位移噪声. ASTROD-GW 亦应进行相关实验室试验, 但原理的可行性是相同的.

时间延迟干涉作为空间引力波探测任务中的关键环节, 直接影响其探测的灵敏度. 本文介绍了空间引力波探测中时间延迟干涉的数值计算原理, 第 1 代时间延迟干涉的路径, 以及通过已有的第 1 代干涉路径, 使用适当的方法构造第 2 代干涉路径的过程. 并根据已有的干涉路径对 ASTROD-GW 任务中的时间延迟干涉做了相应的数值计算.

**致谢** 感谢紫金山天文台李彬同学在图片处理方面的帮助.

## 参 考 文 献

- [1] Kuroda K, Nakatani I, Ohashi M, et al. CQGra, 2010, 27: 084004
- [2] LISA Study Team, LISA (Laser Interferometer Space Antenna): A Cornerstone Mission for the Observation of Gravitational Waves, System and Technology Study Report, ESA-SCI 11, 2000
- [3] Ni W T. IJMPD, 2008, 17: 921
- [4] Bec-Borsenberger A, Christensen-Dalsgaard J, Cruise M, et al. Astrodynamical Space Test of Relativity using Optical Devices (ASTROD)—A Proposal Submitted to ESA in Response to Call for Mission Proposals for Two Flexi-Mission F2/F3, 2000
- [5] Ni W T. MPLA, 2010, 25: 922
- [6] 倪维斗. ASTROD 空间引力波探测优化方案与实验室研究项目建议书, 2009
- [7] 倪维斗, 门金瑞, 梅晓红, 等. 中国宇航学会深空探测技术专业委员会第六届学术年会论文集, 2009: 122
- [8] Ni W T. CQGra, 2009, 26: 075021
- [9] Kawamura S, Nakamura T, Ando M, et al. CQGra, 2006, 23: S125
- [10] Crowder J, Cornish N J. PhRvD, 2005, 72: 083005

- [11] Seto N. PhRvD, 2006, 73: 063001
- [12] Ni W T, Shy J T, Tseng S M, et al. SPIE, 1997, 3116: 105
- [13] Ni W T. Gravitational Wave Detection. Tokyo: Universal Academy Press, 1997: 117
- [14] Chiou D W, Ni W T. AdSpR, 2000, 25: 1259
- [15] 汤键仁, 倪维斗. 云南天文台台刊, 2002: 21
- [16] Brumberg V A. Essential Relativistic Celestial Mechanics. Bristol: Adam Hilger, 1991: 175-177
- [17] 徐萃薇, 孙绳武. 计算方法引论. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2002
- [18] 刘林, 侯锡云. 轨道力学. 南京: 南京大学出版社, 2007
- [19] 门金瑞, 倪维斗, 王刚. 天文学报, 2010, 51: 198
- [20] Men J R, Ni W T, Wang G. ChA&A, 2010, 34: 434
- [21] 胡中为, 萧耐园. 天文学教程 (上册). 北京: 高等教育出版社, 2003: 235-240
- [22] 李广宇, 田兰兰. 紫金山天文台台刊, 2004, 23: 160
- [23] Newhall X X. CeMec, 1989, 45: 305
- [24] Kopeikin S M. MNRAS, 2009, 399: 1539
- [25] Shapiro I I. PhRvL, 1964, 13: 789
- [26] Wu A M, Xu X H, Ni W T. IJMPD, 2000, 9: 201
- [27] Ni W T, Sandford M C W, Veillet C, et al. AdSpR, 2003, 32: 1437
- [28] Tinto M, Estabrook F B, Armstrong J W. PhRvD, 2004, 69: 082001
- [29] 廖安琪, 倪维斗, 施宙聪. 云南天文台台刊, 2002: 88
- [30] Liao A C, Ni W T, Shy J T. IJMPD, 2002, 11: 1075
- [31] Dick G J, Strelak M D, Birnbaum K, et al. IPN Progress Report, 2008: 42
- [32] Tinto M, Dhurandhar S V. LRR, 2005, 8: 4
- [33] Armstrong J W, Estabrook F B, Tinto M. ApJ, 1999, 527: 814
- [34] Estabrook F B, Tinto M, Armstrong J W. PhRvD, 2000, 62: 042002
- [35] Shaddock D A, Tinto M, Estabrook F B, et al. PhRvD, 2003, 68: 061303
- [36] Vallisneri M. PhRvD, 2005, 72: 042003
- [37] de Vine G, Ware B, McKenzie K, et al. PhRvL, 2010, 104: 211103

## ASTROD-GW Time Delay Interferometry

WANG Gang<sup>1,2</sup> NI Wei-tou<sup>3,4</sup>

(1 Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008)

(2 Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

(3 Shanghai United Center for Astrophysics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234)

(4 Department of Physics, National Tsing Hua University, Hsinchu 300)

**ABSTRACT** ASTROD-GW (ASTROD [Astrodynamical Space Test of Relativity using Optical Devices] optimized for Gravitation Wave detection) is an optimization of ASTROD to focus on the goal of detecting gravitation waves. The three spacecraft in the mission orbits are chosen to be near the Sun-Earth Lagrange points  $L_3$ ,  $L_4$  and  $L_5$ . They form a nearly equilateral array and an interferometric array with the arm lengths of about 260 million kilometers. A set of 20-year optimized mission orbits of the ASTROD-GW spacecraft is worked out by us. With this, we perform the time delay interferometry simulation numerically using CGC2.7 ephemeris framework.

**Key words** gravitational waves, instrumentation: interferometers, methods: numerical