

粒子在标量张量理论的二阶后闵可夫斯基 近似弱引力场中的引力偏转*

董 鹏^{1,2†} 李洪银^{3,4}

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

(2 中国科学院研究生院 北京 100049)

(3 华中科技大学控制科学与工程系 武汉 430074)

(4 华中科技大学物理学院 武汉 430074)

摘要 标量张量理论是目前为止最成功的相对论性引力理论之一, 经受住了已有实验和观测的检验. 随着实验和观测精度的提高, 理论将得到进一步的检验. 为此将该理论的可观测效应计算到二阶后牛顿近似非常必要. 标量张量理论的二阶后牛顿近似结果已经由 Xie 等人给出. 为得到有质量粒子在弱引力场中的偏转情况, 利用二阶后闵可夫斯基近似下的度规解得到了粒子的测地线方程, 并通过迭代的方法求得在非束缚条件下, 粒子在弱引力场中的轨迹的解析解. 进一步利用此结果计算了粒子在弱引力场中的偏转角 (与光线的偏转角不同) 并与前人的结果进行了比较.

关键词 天体力学, 相对论, 引力, 方法: 解析

中图分类号: P 131; **文献标识码:** A

1 引言

标量张量理论作为相对论性引力理论一直以来都受到广泛的关注^[1]. 该理论除包含通常的度规张量场之外, 还包含了标量场 ϕ (以非最小耦合方式引入), 其场方程可由如下作用量给出:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int [\phi R + \theta(\phi) \frac{\phi_{,\rho} \phi_{,\rho}}{\phi} + \Lambda(\phi) + 16\pi L(g_{\mu\nu}, \Psi)] \sqrt{-g} d^4x, \quad (1)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 为度规张量系数, g 为 $g_{\mu\nu}$ 的行列式, R 为曲率标量, θ 为耦合函数, Λ 为势函数, L 为物质场的拉氏量, Ψ 表示各种物质场, 本文采用爱因斯坦求和规则, 希腊字母表示四维时空指标 (0,1,2,3), 拉丁字母表示三维空间指标 (1,2,3), $\phi_{,\rho}$ 表示变量 ϕ 对坐标 x^ρ 的普通导数. 当 $\theta = \omega_0$ 为常数时, 此理论即为 Brans-Dicke 理论^[2], 进一步当取极限 $\omega_0 \rightarrow \infty$ 时, 此理论即为广义相对论. 2003 年, 通过对卡西尼号土星探测器发回的雷达信号的时延效应的测量, Bertotti 等^[3] 给出了参数 ω_0 迄今为止最好的限制: $\omega_0 \geq 40000$.

2011-04-27 收到原稿, 2011-05-11 收到修改稿

* 国家自然科学基金项目 (10875171) 资助

† dongpeng@pmo.ac.cn

随着科技的发展, 实验检测和观测精度不断提高, 检测或利用这些理论就要将其计算到相应的精度, 在相对论性引力理论的可观测效应的计算中通常使用后牛顿或后闵可夫斯基近似方法. Xie 等^[4]采用 Chandrasekhar 的后牛顿近似方法给出了标量张量理论的理想流体模型下的二阶后牛顿近似解, 在此基础上我们利用光子的测地线方程通过迭代方法求得了二阶后牛顿近似下的光线轨迹, 进而得到了光线偏转角^[5].

在非束缚轨道的情形下, 相对论性粒子比如中子、中微子等在引力场中也会出现类似于光子的引力偏转和时间延迟效应. Bhadra 等^[6]利用参数化的后牛顿度规计算了粒子在弱引力场中的引力偏转角, 但并没有给出粒子在引力场中的运动轨迹. 在本文中, 我们利用迭代方法求得标量张量理论二阶后闵可夫斯基近似下的粒子测地线方程的解析解. 进一步利用此解计算了粒子在此引力场中的偏转角并与前人的结果进行了比较. 本文所采用度规号差为 $(+, -, -, -)$, 未特意说明处引力常数 G 和光速 c 均为 1.

2 标量张量理论的二阶后闵可夫斯基近似解

标量张量理论二阶后闵可夫斯基近似的一般解在静态球对称情形下可以简化为^[4]

$$g_{00} = 1 - 2\frac{m}{r} + 2\beta\frac{m^2}{r^2}, \quad g_{ij} = -\delta_{ij}\left(1 + 2\gamma\frac{m}{r} + \frac{3}{2}\varepsilon\frac{m^2}{r^2}\right), \quad (2)$$

其中 g_{00} 和 g_{ij} 分别为度规张量的时间 - 时间和空间 - 空间分量, δ_{ij} 为平直空间度规, m 为天体的质量, r 为质心坐标系中的径向参量, 且满足 $r = |\vec{x}|$; 而参数 γ 、 β 、 ε 由下式给出:

$$\gamma = \frac{\omega_0 + 1}{\omega_0 + 2}, \quad \beta = 1 + \frac{\omega_1}{(2\omega_0 + 3)(2\omega_0 + 4)^2} \quad (3)$$

和

$$\varepsilon = 1 + \frac{15}{6}(\gamma - 1) + \frac{4}{3}[(\gamma - 1)^2 + \beta - 1], \quad (4)$$

其中参数 ω_0 和 ω_1 是标量场耦合函数 $\theta(\phi)$ 的展开系数. 同时可以看出, 对于标量张量理论的二阶后闵可夫斯基近似, 其中只包含了两个独立参数 γ 和 β , 而参数 ε 依赖于前两个参数, 可写作 $\varepsilon(\gamma, \beta)$.

3 粒子的测地线方程

在引力场中, 自由粒子沿测地线运动, 其方程空间部分的表达式为^[7]

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i - \Gamma_{0j}^i \frac{dx^j}{dt} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + (\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{0j}^0 \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{jk}^0 \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}) \frac{dx^i}{dt}, \quad (5)$$

其中 t 为坐标时, $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ 为联络系数. 将 (2) 式给出的度规代入上式可以得到与之对应的

粒子的测地线方程如下:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} = & -m[(1+\gamma)\frac{\mathbf{x}}{r^3} + 2(1+\gamma)\frac{\dot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x})}{r^3}] + \\ & m^2\{2[\gamma+\beta+(\gamma^2-\varepsilon)\dot{\mathbf{x}}^2]\frac{\mathbf{x}}{r^4} + 2\varepsilon\frac{\mathbf{x}(\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x})^2}{r^6} + \\ & 2[2(1-\beta)+\varepsilon-2\gamma^2]\frac{\dot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x})}{r^4}\}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中用黑体表示三维矢量, $\dot{\mathbf{x}}$ 和 $\ddot{\mathbf{x}}$ 分别表示 \mathbf{x} 关于时间的一阶和二阶导数. 包含 m 和 m^2 的项分别为一阶和二阶后闵可夫斯基贡献项.

3.1 一阶后闵可夫斯基近似解

在远离引力源的地方, 时空为闵可夫斯基空间, 自由粒子运动的轨迹为^[8-9]

$$\mathbf{x}_M = \mathbf{x}_0 + v_0 \mathbf{n}(t - t_0), \quad (7)$$

其中 v_0 和 \mathbf{n} 分别为初始速度的大小和方向, \mathbf{x}_0 和 t_0 分别为初始位置矢量和初始时刻. 假设一阶后闵可夫斯基近似下的轨迹为

$$\mathbf{x}_{PM} = \mathbf{x}_M + \mathbf{x}_{1M}, \quad (8)$$

其中 \mathbf{x}_{1M} 为一阶后闵可夫斯基修正项, 从此式可以得到速度的定义为

$$\mathbf{k}_{PM} = \frac{1}{v_0} \frac{d\mathbf{x}_{PM}}{dt} = \mathbf{n} + \mathbf{k}_{1M}. \quad (9)$$

为了方便积分, 引入碰撞参数 b 和变量参数 λ 如下:

$$b \equiv \sqrt{x_0^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0)^2}, \quad \lambda \equiv \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_M}{b} \quad (10)$$

以及存在如下关系:

$$v_0 dt = b d\lambda, \quad r = b\sqrt{1 + \lambda^2}. \quad (11)$$

将 (10) 和 (11) 两式代入一阶近似下的测地线方程 (6) 式中积分得到

$$\mathbf{k}_{1M} = (\gamma + \frac{1}{\vartheta^2})m \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{x})}{b^2} \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{r}\right) + (2 + \gamma - \frac{1}{\vartheta^2})m \frac{\mathbf{n}}{r} \quad (12)$$

和

$$\mathbf{x}_{1M} = -v_0^2 m \left[\left(\frac{1}{\vartheta^2} + \gamma\right) \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{x})}{r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} + (2 + \gamma - \frac{1}{\vartheta^2}) \mathbf{n} \lg(r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \right], \quad (13)$$

其中 $\vartheta = \frac{v_0}{c}$. (12) 式为一次积分结果, 表示一阶后闵可夫斯基近似下的粒子速度矢量, 可以用来计算偏转角; (13) 式为两次积分的结果, 表示一阶后闵可夫斯基近似下的粒子轨迹, 可以用来讨论边值问题及时间延迟效应.

3.2 二阶后闵可夫斯基近似解

在求解二阶测地线方程时, 仅仅用方程中显现的二阶贡献是不够的, 因为方程中粒子轨迹 \mathbf{x} 的一阶修正在一阶方程部分的贡献为二阶量级. 因此在对二阶方程积分时, 这

些项也考虑进去, 因此要用迭代的方法来求解. 经过比较复杂的计算之后得到二阶后闵可夫斯基近似下的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\text{PPM}}(\mathbf{x}) = & \mathbf{n} + m\left[\left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right)\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{x})}{r(r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})} - \left(2 + \gamma - \frac{1}{\vartheta^2}\right)\frac{\mathbf{n}}{r}\right] + \\ & m^2\left\{2(1 + \gamma)\left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right)\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{n})}{r^2(r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})} + \left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right)^2\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{n})}{r(r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2} + \right. \\ & \left. [2\gamma(1 + \gamma) + \left(2 - \frac{1}{\vartheta^2}\right)\beta - \frac{1}{2}\varepsilon]\frac{\mathbf{n}}{r^2} - \left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right)^2\frac{\mathbf{n}}{r(r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})} - \right. \\ & \left. \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{r^4}\mathbf{x} - \left[(2 + 2\gamma - \beta)\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{3}{4}\varepsilon\right](\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{n})}{r^2|\mathbf{n} \times \mathbf{x}|^2} - \right. \\ & \left. \left[(2 + 2\gamma - \beta)\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{3}{4}\varepsilon\right]\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{n})}{|\mathbf{n} \times \mathbf{x}|^3}(\pi - \theta(\mathbf{n}, \mathbf{x}))\right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\theta(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \arccos \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{n}||\mathbf{x}|}$. 从上式可以看出各部分的贡献: 方程右端第 1 项为平直空间, 第 2 项为一阶后闵可夫斯基修正, 第 3 项为二阶后闵可夫斯基修正, 这个表达式将在后面求偏转角中用到. 将 (14) 式积分得到质点的轨迹为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{PPM}}(\mathbf{x}) = & \mathbf{x}_0 + v_0\mathbf{n}(t - t_0) + \\ & mv_0^2\left[\left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right)\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{x})}{r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} - \left(2 + \gamma - \frac{1}{\vartheta^2}\right)\mathbf{n} \lg(r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\right] + \\ & m^2v_0^2\left\{\left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right)^2\left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{x})}{(r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2} - \frac{\mathbf{n}}{r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}\right] + \frac{1}{4}\varepsilon\frac{\mathbf{x}}{r^2} - \right. \\ & \left. \left[(2 + 2\gamma - \beta)\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{3}{4}\varepsilon\right](\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{x})}{|\mathbf{n} \times \mathbf{x}|^3}(\pi - \theta(\mathbf{n}, \mathbf{x})) - \right. \\ & \left. \left[(2 + 2\gamma - \beta)\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{3}{4}\varepsilon\right]\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{x}|}\left(\frac{\pi}{2} - \theta(\mathbf{n}, \mathbf{x})\right)\right\} + \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (15)$$

上式右端第 1 ~ 2 项为平直空间, 第 3 项为一阶后闵可夫斯基修正, 第 4 项为二阶后闵可夫斯基修正. 而积分常数 \mathbf{c} 由初始条件 $\mathbf{x}_{\text{PPM}}(\mathbf{x}_0) = 0$ 来确定. 此结果可以用来讨论边值问题以及质点的传播时间问题.

3.3 偏转角

为了便于跟前人的结果比较, 下面我们来利用前面得到的结果计算粒子在弱引力场中的引力偏转角. 考虑粒子从远离引力场处以初始速度 \mathbf{v}_0 自初始位置 \mathbf{x}_0 出发, 运动到观察者 \mathbf{x} (远离引力场) 处, 所产生的引力偏转角由下式给出^[10]:

$$\alpha = \left| \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{k}(t) \times \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{k}(t) \right|. \quad (16)$$

对 (14) 式取正负极限分别得到^[11]

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{k}(t) = \mathbf{n} \quad (17)$$

和

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{k}(t) = & \mathbf{n} - 2\left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right)m\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{n})}{|\mathbf{n} \times \mathbf{x}_0|^2} - \\ & m^2\left\{2\left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right)^2\left[\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{x}_0|^2} - (r_0 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0)\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{n})}{|\mathbf{n} \times \mathbf{x}_0|^4}\right] + \right. \\ & \left. \left[(2 + 2\gamma - \beta)\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{3}{4}\varepsilon\right]\pi\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{n})}{|\mathbf{n} \times \mathbf{x}_0|^3}\right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

将 (17) 式和 (18) 式代入 (16) 式可以得到

$$\alpha = 2\left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right) \frac{m}{|\mathbf{n} \times \mathbf{x}_0|} + \left\{ \left[(2 + 2\gamma - \beta) \frac{1}{\vartheta^2} + \frac{3}{4}\varepsilon \right] \pi - 2\left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right)^2 \frac{(r_0 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{n} \times \mathbf{x}_0|} \right\} \frac{m^2}{|\mathbf{n} \times \mathbf{x}_0|^2}, \quad (19)$$

上式右端包含了坐标 r_0 的项, 这个结果依赖于坐标系的选取, 因此我们通过重新定义碰撞参数来消除这种坐标依赖性. 在二阶后闵可夫斯基近似下定义如下碰撞参数^[11]:

$$D = \lim_{t \rightarrow -\infty} |\mathbf{x}(t) \times \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{k}(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}(t) \times \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{k}(t)|. \quad (20)$$

将 (14) 和 (15) 式代入 (20) 式, 保留到一阶项可以得到

$$D = |\mathbf{n} \times \mathbf{x}_0| + \left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right) m \frac{(r_0 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{n} \times \mathbf{x}_0|}, \quad (21)$$

再将 (21) 式代入 (19) 式, 可以得到

$$\alpha = 2\left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right) \frac{m}{D} + \left[(2 + 2\gamma - \beta) \frac{1}{\vartheta^2} + \frac{3}{4}\varepsilon \right] \frac{m^2 \pi}{D^2}. \quad (22)$$

上式即为粒子在弱引力场中的二阶后闵可夫斯基近似下的偏转角, 此式也适用于光子, 当 $v_0 = c$ 时, 即为光线的偏转角, 这个结果与之前的结果一致^[5]. 将此结果与文献 [6] 的结果比较, 文献 [6] 的结果多了一项 $2\left(\gamma + \frac{1}{\vartheta^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\vartheta^2}\right)$, 其中 $V = \frac{v_0}{c}$, 这是引用文献 [6] 中的公式, 而这项在本文中并没有出现. 从本文的求解过程可以发现, 其来源于文献 [6] 中没有给出粒子运动轨迹而选取了如下错误的碰撞参数

$$D' = |\mathbf{n} \times \mathbf{x}_0| + (\gamma + 1)m \frac{(r_0 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{n} \times \mathbf{x}_0|}. \quad (23)$$

4 结论

利用标量张量理论的二阶后闵可夫斯基近似度规通过迭代的方法得到了质点测地线方程在非束缚轨道情形下的解析解, 当 $v_0 = c$ 时, 对应的是光子; 当 $v_0 < c$ 时, 对应的是有质量的粒子. 进一步, 利用所得到的解析解求得质点在引力场中的偏转角, 这个结果改正了 Bhadra 等人的结果. 此外, 我们所得到的结果也可以用来讨论粒子运动的引力时延效应及中微子的引力透镜现象^[12-13]. 这些将是我们接下来的工作.

参 考 文 献

- [1] Fujii Y, Maeda K. The Scalar-tensor Theory of Gravitation. Cambridge: Cambridge University Press, 2003: 45
- [2] Brans C, Dicke R H. PhRv, 1961, 124: 925
- [3] Bertotti B, Iess L, Tortora P. Natur, 2003, 425: 374

- [4] Xie Y, Ni W T, Dong P, et al. *AdSpR*, 2009, 43: 171
- [5] Dong P, Li L. *CoTPh*, 2011, 55: 457
- [6] Bhadra A, Sarkar K, Nandi K K. *PhRvD*, 2007, 75: 123004
- [7] Gong Y X, Xu C M. *ChPhL*, 2003, 20: 195
- [8] 宫衍香, 须重明. *天文学报*, 2003, 44: 382
- [9] Gong Y X, Xu C M. *ChA&A*, 2004, 28: 1
- [10] Brumberg V A. *Essential Relativistic Celestial Mechanics*. Bristol: Adam Hilder, 1991: 104
- [11] Klioner S A, Zschocke S. *CQGra*, 2010, 27: 075015
- [12] Luo X L, Peng Q H, Zhang L D, et al. *ChPhL*, 2004, 21: 1236
- [13] Luo X L. *ChPhL*, 2009, 26: 109801

Gravitational Deflection of Massive Particles in Second Post-Minkowskian Approximation of Scalar-tensor Theory

DONG Peng^{1,2} LI Hong-yin^{3,4}

(1 *Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008*)

(2 *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049*)

(3 *Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074*)

(4 *School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074*)

ABSTRACT Many alternative theories have been proposed, among which the scalar-tensor theory is the most interesting one, because it is the simplest and most natural way to modify general relativity, and stands all kinds of tests. With the ever-increasing precision of experiment and astrophysical observation, the second post-Newtonian approximation of relevant theories of gravity are needed, and some observed effects to that order are also needed. We use the metric coefficients and the equation of motion obtained in the second post-Minkowskian approximation of scalar-tensor theory to derive the trajectories of massive particles to that order for the unbounded case. The deflection angle is obtained and compared with previous works.

Key words celestial mechanics, relativity theory, gravitation, methods: analytical