

小行星光变曲线分析及形状参数反演*

高 豪¹ 赵舜景¹ 廖新浩² 雷汉伦^{1†}

(1 南京大学天文与空间科学学院 南京 210023)

(2 中国科学院上海天文台 上海 200030)

摘要 小行星是广泛存在于太阳系内的天体, 光变曲线是在一段时间内对其进行连续观测后得到的光度随时间变化的曲线, 包含了小行星的轨道、自转、形状以及热物理等相关的参数信息. 通过光变曲线可对小行星进行形状反演, 探究光变曲线形态与小行星自转状态之间的关系. 首先通过综合考虑小行星的形状、自转状态以及相位角, 建立小行星的光度模型, 模拟生成小行星的光变曲线; 再基于三轴椭球体模型分析各个参数对光变曲线的影响, 研究小行星在主轴旋转和非主轴旋转情形下光变曲线的变化, 获得光变曲线特征和自转及形状参数之间的对应关系; 然后分别利用三轴椭球体模型以及凸多面体模型对小行星的光变曲线进行参数拟合, 反演得到小行星的自转和形状参数.

关键词 天体测量与天体力学, 行星和卫星: 动力学演化和稳定性, 矮行星, 小行星: 个别: 951/Gaspra

中图分类号: P185; **文献标识码**: A

1 引言

太阳系内已发现的小行星有数百万颗, 一般被认为是由太阳系形成初期的星子演化而来. 这些小行星可以根据分布位置、动力学性质以及光谱特征等不同的标准进行分类.

小行星的自转周期、极轴指向、反照率以及形状等是重要的物理参数, 是深入理解小行星动力学演化及其起源的基础. Yarkovsky效应作为小行星的重要非引力摄动, 其物理模型与小行星的形状和自转状态密切相关^[1-4]. Yarkovsky效应影响着不同小行星族的迁移过程^[5-6]以及近地小行星与地球的碰撞风险评估^[7-8]. 此外, 同样与形状和自转状态相关^[4]的YORP (Yarkovsky-O'Keefe-Radzievskii-Paddack)效应在小行星的自转演化^[9-11]和地貌演变^[12]等方面也发挥着重要作用. 因此, 获取小

行星的自转、形状及热物理参数对于研究小行星的起源和演化至关重要. 分析地面望远镜对小行星进行连续测光所得的光变曲线是研究这些物理参数的主要手段. 小行星的光度变化主要体现在: (1)小行星与太阳和地球之间的距离发生变化; (2)小行星与地球连线和小行星与太阳连线的夹角(相位角)的改变; (3)小行星自转状态和自转时由于不规则形状造成的亮度变化. 因此, 通过合理建模对小行星光变曲线进行模拟可反演得到自转周期、极轴指向和表面形状等关键信息.

早在1906年, 科学家们意识到由于表面的不规则和表面物质反照率的差异等众多因素, 通过小行星的光变曲线难以确定其表面形状, 反演问题在实际情况下很难被完整解决^[13]. 但在对小行星自转状态和物理信息进行合理的简化与假设后,

2025-02-03收到原稿, 2025-04-14收到修改稿

*国家自然科学基金项目(12573063、12233003)资助

†leihl@nju.edu.cn

Groeneveld等^[14]于1954年首次提出从光变曲线中提取小行星自转周期与极轴指向的方法,并被Gehrels^[15]及Taylor^[16]完善.随后许多光变曲线的反演方法相继被开发,例如基于3轴椭球体模型的“振幅-星等”方法(Amplitude-Magnitude method)^[17]、Cellino椭球体模型^[18]、凸面体模型^[19-20].近期Lu等^[21]对Cellino椭球体模型进行了完善,Muinenen等^[22]得到了Lommel-Seeliger 3轴椭球体模型积分亮度的解析形式,并将马尔可夫链蒙特卡罗方法应用于该模型.

已有的反演方法大多建立在小行星围绕自身最大的惯量主轴旋转且旋转轴不发生改变的假设之上.事实上,小行星的自转轴指向不是固定不变的,这种自转轴本身的运动同样会影响其光变曲线的形状,即小行星光变曲线的不规则性是自转状态、相位角、表面反照率等物理性质不均匀作用下的结果.因此,若能通过光变曲线确定小行星的运动状态,可为其更精确的形状反演提供信息.本文的主要目标是采用3轴椭球体和凸多面体模型来分析小行星的形状与自转状态对光变曲线的影响,尤其是非主轴旋转引起的自转轴变化造成的影响,并使用已经观测到的光变曲线对小行星进行形状参数反演.在上述各模型中,凸多面体模型有着更多的形状参数,反演结果更接近真实的不规则小行星.因此本文使用Kaasalainen等^[19-20]提出的凸多面体模型进行形状反演,同时在该模型的基础上,进一步研究了小行星进行非主轴旋转时的光变曲线,使用快速傅里叶变换对其进行频谱分析,并引入Andoyer变量^[23]从理论上讨论刚体自由运动的基本频率与光变曲线特征的对应关系.

2 小行星光度模型

小行星的光度与散射模型、自转轴指向、表面形状以及相位角相关.光变曲线的反演就是采用合适的模型,将小行星的光度表示为各参数的函数,继而用最小二乘等方法进行拟合并得到最优解.

自转周期和自转轴指向可以很好地表征小行星的自转状态.小行星在空间中的运动可以近似

看作是无外力矩作用下刚体的自由转动,若仅考虑绕惯量主轴旋转,则小行星运动过程中的自转周期和自转轴指向均不发生改变.由黄道坐标系到小行星本体主轴坐标系(令自转轴为 z 轴)的转换关系为

$$r_{\text{ast}} = \mathbf{R}_z \left[\phi_0 + \frac{2\pi}{P} (t - t_0) \right] \mathbf{R}_y (\tilde{\beta}) \mathbf{R}_z (\lambda) r_{\text{ecl}}, \quad (1)$$

其中 $\tilde{\beta} = \frac{\pi}{2} - \beta$ 为自转轴指向的余黄纬, β 和 λ 分别为自转轴指向的黄纬和黄经, P 为小行星的自转周期, ϕ_0 为初始时刻 t_0 的自转角, r_{ast} 为小行星本体主轴坐标系, r_{ecl} 为黄道坐标系. \mathbf{R}_y 和 \mathbf{R}_z 分别为绕 y 轴和 z 轴的旋转矩阵.

考虑到小行星表面物质分布不均匀导致不同部位的反照率差异、小行星表面大尺度结构的遮挡以及微观结构间的遮掩效应等因素,光在小行星表面的散射是一个十分复杂的过程.本文采用Kaasalainen等^[19]提出的散射模型,将Lambert散射和Lommel-Seeliger散射定律相结合,用来表示反射光与入射光强度的比值:

$$S(\mu, \mu_0) = \mu\mu_0 \left(\frac{1}{\mu + \mu_0} + c_0 \right), \quad (2)$$

其中 S 为散射光强与入射光强之比, $\mu_0 = \cos \theta_0$, $\mu = \cos \theta$, θ_0 和 θ 分别为光线入射角与反射角. c_0 为散射权重系数,与小行星表面的物质组成有关.在该模型中,小行星表面物质的反照率假定为常数.

由于表面物质的相互遮掩^[24]以及相干后向散射^[25]等现象,小行星的亮度还与相位角 α 有关(小行星对日地连线所成的张角).使用3参数相位函数^[20]

$$f(\alpha) = A_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{D}\right) + k\alpha + 1 \quad (3)$$

来描述小行星亮度与相位角的关系,其中 $f(\alpha)$ 为相位函数, A_0 、 D 、 k 为待定系数.

结合散射定律与相位函数,可以得到小行星的光度模型^[19]:

$$\mathcal{L} = \iint_{\Sigma} f(\alpha) S(\mu, \mu_0) d\sigma, \quad (4)$$

其中 \mathcal{L} 为小行星光度, Σ 为积分区域,是小行星表

面满足 μ 、 $\mu_0 > 0$ 的区域, σ 为积分面元.

真实的小行星呈表面凹凸不平的不规则形状, 这些大尺度不平整结构会对光线的散射过程造成遮掩. 若不对形状加以限制, 会极大地增加计算量和求解的复杂度. 为方便, 对小行星的形状加入凸性约束可以规避因面元之间相互遮掩而引起的复杂计算. 在具体反演过程中, 先使用较为简单的3轴椭球体形状模型来反演小行星的自转轴指向和形状, 再以此为初值用较为复杂的不规则凸多面体模型对形状参数进行更精细的求解.

3 形状与自转参数变化对光变曲线的影响

本节探究小行星形状和自转参数对光变曲线影响的同时, 还对小行星进行非主轴旋转时的光变曲线进行分析. 相较于凸多面体模型, 3轴椭球体模型的形状简单, 参数易于控制, 且可以求得其惯量主轴(取椭球体3轴长分别为 a 、 b 、 c , 令 $a > b > c$, c 所在的轴即为最大的惯量主轴). 因此, 本节的讨论均采用3轴椭球体模型.

3.1 主轴旋转

这里仅考虑小行星形状和自转状态对光变曲线的影响, 不考虑小行星的公转, 因此将小行星、太阳、地球三者间的相对位置固定. 小行星的质心位置取为坐标原点, 对于主带小行星来说, 其轨道倾角通常小于 10° , 因此假设太阳、小行星和地球三者共面(均位于黄道面上), 取黄道面为空间坐标系的 xOy 平面, 在无量纲单位系统下, 将太阳的位置取为 $(1, 0, 0)$, 地球的位置取为 $(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$. 由于忽略公转, 相位角不发生变化. 不失一般性, 取 $\alpha = 23.3^\circ$.

3.1.1 形状参数对光变曲线的影响

椭球体模型的形状参数不仅会影响积分区域的面积, 也会影响各部分面元的外法向量的方向, 从而改变光变曲线. 本节仅分析3轴椭球体形状变化对光变曲线的影响, 将自转轴的黄经与黄纬固定, 取 $\lambda=120^\circ$ 、 $\beta=30^\circ$, 同时固定椭球体的最长轴为 $a=1$, 形状参数取为 b 和 c . 由于主轴旋转椭球

体模型的光变曲线为正弦曲线, 因此可以用均值和振幅来描述曲线的形状.

图1是使用三角剖分3轴椭球体模型计算的光变曲线均值和振幅分布图, 反映了参数 b 、 c 对光变曲线的影响. 由均值分布图可以看出, 随着 b 和 c 由小到大变化, 光变曲线的均值都逐渐增大, 当 $b=c=1$ 时, 光变曲线的均值达到最大值. 这是由于 b 和 c 的增大会使小行星表面被光线照射到的区域面积增大, 从而使光强变大. 由振幅分布图可以看出, 保持 c 不变, 随着 b 的增大振幅逐渐降低, 当 b 增大至1时, 对所有的 c 光变曲线的振幅都降低至0. 这是因为随着 b 的增大, 3轴椭球体越来越对称, 当 $b=1$ 时小行星的形状关于自转轴(即 z 轴)对称, 由于自转轴固定不动, 小行星旋转时被光线照射到的区域不发生改变, 因此光强不再发生变化; 当 b 保持不变时, 随着 c 的增大光变曲线的振幅越来越大. 从极端情况来看, 将小行星视作长宽高分别为 a 、 b 、 c 的长方体, 则自转过程中被光线照射到的最大面积与最小面积之差可用

$$\Delta S = c(ma - nb) \quad (5)$$

来估计, 其中 m 、 n 为与自转状态有关的系数. 由(5)式可以看出随着 c 的增大, ΔS 也逐渐增大, 则光变曲线的振幅逐渐增大.

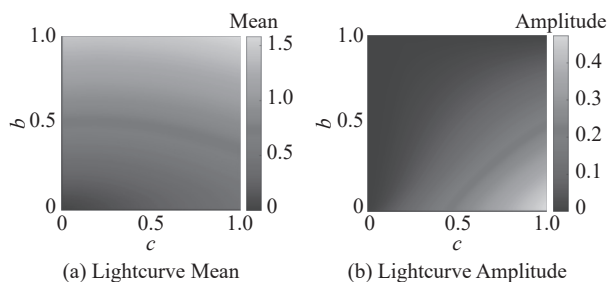


图1 小行星3轴椭球体模型亮度. 图中小行星自转轴的黄经、黄纬指向取为 $\beta=30^\circ$ 、 $\lambda=120^\circ$.

Fig. 1 Asteroid triaxial ellipsoid model brightness. In the figure, the longitude and latitude direction of the asteroid's spin axis are given as $\beta=30^\circ$, $\lambda=120^\circ$.

3.1.2 自转状态对光变曲线的影响

自转状态对于光变曲线的影响见图2. 图2(a)是自转轴黄纬变化时的光变曲线(固定自转轴黄经指向 $\lambda=120^\circ$, 周期 $T=6$ h), 图2(c)是自转轴

黄经发生变化时的光变曲线(固定自转轴黄纬指向 $\lambda=30^\circ$, 周期 $T=6\text{h}$), 图2 (b)和图2 (d)表示改变

太阳或地球坐标, 使其 z 分量不为0后, 自转轴黄纬与黄经发生变化时的光变曲线.

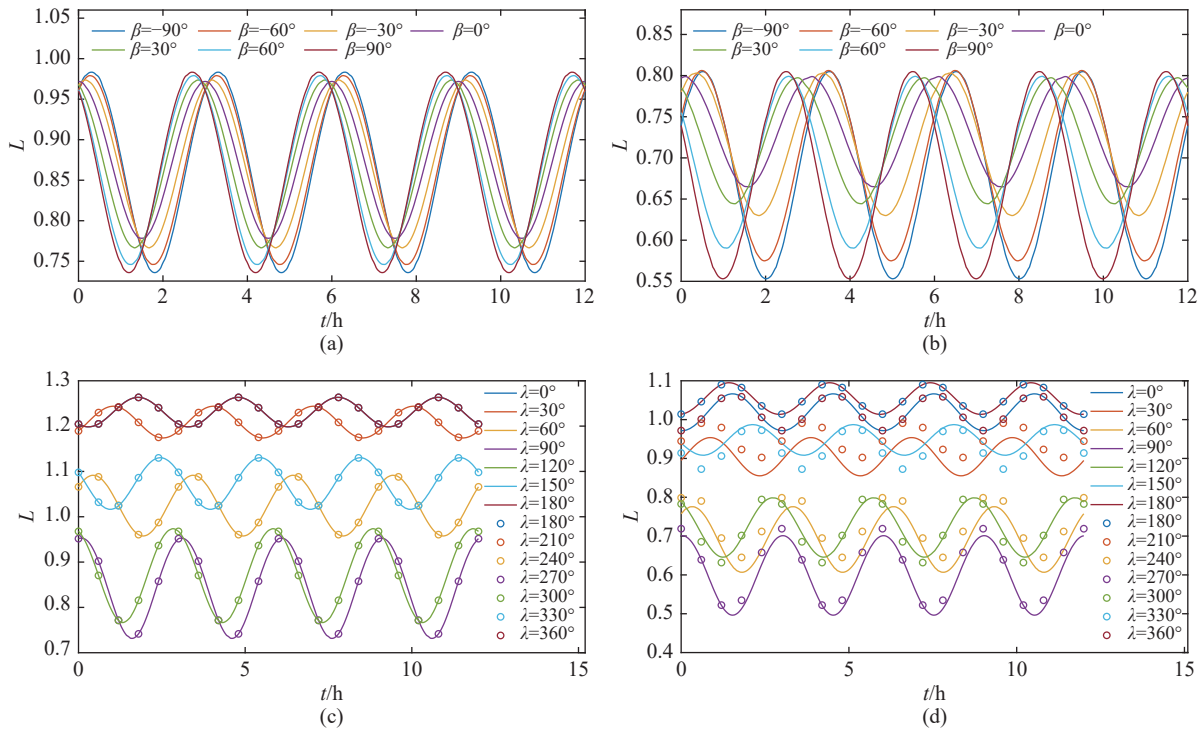


图 2 小行星自转轴指向对光变曲线的影响. 图(a)和(b)中小行星自转轴黄经指向取为 $\lambda = 120^\circ$, 图(c)和(d)中小行星自转轴黄纬指向取为 $\beta = 30^\circ$.

Fig. 2 The effect of the direction of the asteroid's spin axis on the light curve. In panels (a) and (b), the longitude direction of the asteroid's spin axis is taken as $\lambda = 120^\circ$, and in panels (c) and (d), the latitude direction of the asteroid's spin axis is taken as $\beta = 30^\circ$.

根据图2的结果, 我们可以做如下讨论:

●3轴椭球体模型的光变曲线均为正弦曲线, 具有明显的单一周期性.

●当太阳、地球位于坐标系 xOy 平面时, 自转轴黄纬指向会影响光变曲线的振幅以及到达光度极值点的时间, 且关于黄道面对称的自转轴指向形成的一对光变曲线振幅与均值相同, 相交于 $\frac{kT}{4}$ 处. 自转轴黄经变化 180° 时的光变曲线与变化之前保持一致.

●当太阳、地球不位于坐标系 xOy 平面时(即小行星不位于黄道面), 自转轴黄经和黄纬的指向对光变曲线的均值和振幅都有影响. 但是当小行星位于黄道面附近时, 自转轴黄经指向 λ 变化 180° 后的光变曲线与变化之前的光变曲线类似,

表明存在镜像解.

对于第二点我们可以做如下理解. 当自转轴黄纬关于 xOy 平面对称时, 由于太阳和地球坐标都位于 xOy 平面且太阳位于 x 轴, 两种自转状态下相同时刻面元与太阳位置矢量的夹角 μ_0 相同, 但 μ 的变化不同. 当 $t = \frac{kT}{4}$ 时, 两者被照射到的区域相同(但指向不同), 光强相等. 当自转轴黄经变化 180° 后, 设原面元法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 自转轴指向变化后的面元法向量变为 $\mathbf{n}' = (-x, -y, z)$, 由于太阳位置矢量和地球位置矢量的 z 分量都为0, 再考虑到椭球体的对称性, \mathbf{n} 和 \mathbf{n}' 对应面元的面积相等, 因此变化前后光变曲线相同.

3.2 非主轴旋转

小行星的自转可以看作是无外力矩作用下刚

体的自由转动, 这种运动可以用欧拉动力学方程来描述. 取坐标系为主轴坐标系, 欧拉方程为^[26]

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases} \quad (6)$$

其中 I_1 、 I_2 、 I_3 为小行星的主转动惯量, ω_1 、 ω_2 、 ω_3 分别为角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在 3 个坐标轴上的分量. 采用 3 轴椭球体模型, 假定小行星的质量分布均匀, 则有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{2m(b^2 + c^2)}{5} \\ I_2 = \frac{2m(c^2 + a^2)}{5}, \\ I_3 = \frac{2m(a^2 + b^2)}{5} \end{cases} \quad (7)$$

其中 m 为小行星质量, 取 $m=2.5$.

对于前面探讨的主轴旋转, 取最大的主转动惯量所在的轴 I_3 为旋转轴 (z 轴), 那么 $\omega_1 = \omega_2 = 0$, 显然有 $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$, 也即主轴旋转过程中角速度矢量不发生变化, 前面的分析都是以此为基础进行的. 实际上, 太阳系中小行星的自转轴并不都与惯量主轴重合, 二者通常存在一定的夹角. 本节将从无外力矩刚体自由旋转的欧拉方程出发, 分析非主轴旋转对小行星光变曲线的影响.

3.2.1 对称情形

欧拉动力学方程是 3 个相互耦合的微分方程, 难以得到其解析解. 当 $I_1 = I_2$ 时, 方程(6)的第 3 式变为 $I_3 \dot{\omega}_3 = 0$, 此时角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在 I_3 所在轴的投影为常数, 欧拉方程变为

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \end{cases} \quad (8)$$

当 $a = b$ 时(对称情形), 方程(8)可以解析求解:

$$\begin{cases} \omega_1 = A_1 \cos(B_1 \omega_3 t + \alpha_0) \\ \omega_2 = A_1 \sin(B_1 \omega_3 t + \alpha_0), \\ \omega_3 = C_1 \end{cases} \quad (9)$$

其中 A_1 、 $B_1 = \frac{I_3 - I_1}{I_1}$ 、 C_1 和 α_0 是与初值选取有关的积分常数.

分析解(9)式描述了角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在小行星本

体主轴坐标系内的运动. 在转动过程中, $\boldsymbol{\omega}$ 的大小保持不变, 方向在不断变化, 且其投影在 xOy 平面内作半径为 A_1 、角频率为 $B_1 \omega_3$ 的圆周运动.

然而, 要得到非主轴旋转的光变曲线, 必须要求出小行星在空间坐标系内的运动状态. 刚体在空间中的状态通常用欧拉角表示, (9)式给出了显含时间的角速度表达式, 可通过欧拉运动学方程来求解任意时刻的欧拉角, 即^[26]

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega_1 \cos \psi - \omega_2 \sin \psi \\ \dot{\varphi} = \omega_1 \csc \theta \sin \psi + \omega_2 \csc \theta \cos \psi \\ \dot{\psi} = -\omega_1 \cot \theta \sin \psi - \omega_2 \cot \theta \cos \psi + \omega_3 \end{cases}, \quad (10)$$

其中 θ 、 φ 、 ψ 分别为章动角, 进动角和自转角.

将(9)式代入上式可得到

$$\begin{cases} \dot{\theta} = A_1 \cos(B_1 \omega_3 t + \psi + \alpha_0) \\ \dot{\varphi} = A_1 \csc \theta \sin(B_1 \omega_3 t + \psi + \alpha_0) \\ \dot{\psi} = \omega_3 - A_1 \cot \theta \sin(B_1 \omega_3 t + \psi + \alpha_0) \end{cases}, \quad (11)$$

由于旋转过程中小行星没有被施加外力矩, 因此小行星的角动量守恒, 角动量的方向和大小在空间坐标系中保持不变. 取角动量所在方向为空间坐标系 z' 轴, 由于角动量在小行星本体坐标系 z 轴的分量 $L_3 = I_3 \omega_3$ 为常数, 二者夹角保持不变, 则根据欧拉角的定义, 有 $\dot{\theta} = 0$, 代入(11)式可得

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\varphi} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta} \\ \dot{\psi} = B \omega_3 \end{cases} \quad (12)$$

由上述分析可知, 对称情形下的非主轴旋转存在两个周期, 一个是小行星的自转周期, 另一个是角速度矢量围绕主轴进行旋转的周期, 因此形成的光变曲线特征和这两个基本频率密切相关.

取 $a=b=1$ 、 $c=0.6$ 为 3 轴椭球体的形状参数, 初始角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在本体主轴坐标系中的指向为 $(65^\circ, 40^\circ)$, 选择初始周期为 $T_0=3$ h. 由上述条件可以确定小行星主轴坐标系内角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角动量 \mathbf{L} 的取值: $\boldsymbol{\omega} = (0.678, 0.569, 1.8982)$, $\mathbf{L} = (0.9221, 0.7738, 3.6973)$. 用上述初值对光变曲线进行模拟, 并使用快速傅里叶变换对其进行频谱分析, 采样频率取为 10^{-3} , 结果如图 3 所示, 其中 f 为频率.

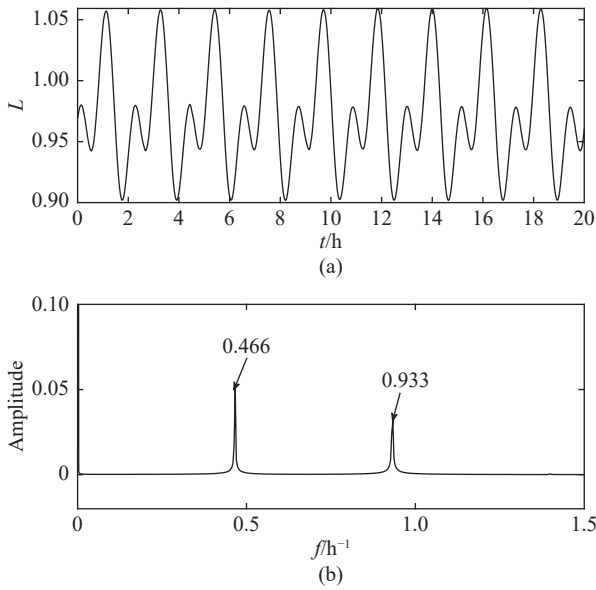


图 3 模型参数取 $a = b = 1$ 、 $c = 0.6$ 、 $T_0 = 3\text{h}$ 时的光变曲线(a)及其频谱分析结果(b)

Fig. 3 Light curve (a) and spectral analysis results (b) when model parameters are $a = b = 1$, $c = 0.6$, $T_0 = 3\text{h}$

不同于主轴旋转, 非主轴旋转的光变曲线不是正弦曲线, 采样结果图中出现了两个峰. 对于对称刚体的非主轴旋转, 由(12)式可知, 在空间坐标系中, 刚体的章动角保持恒定, 自转角和进动角则匀速变化. 因此光变曲线应存在两个周期, 分别对应自转角和进动角的变化. 然而由于此时形状参数 $a = b$, 模型具有对称性, 在旋转过程中自转角的变化对光变曲线无影响. 假定进动角不变, 不管自转角如何改变, 对称刚体被照射到的区域都具有相同的形状, 所以光变曲线的变化与自转角无关. 因此光变曲线的周期只与进动角周期有关.

根据选定的初值, 可以从理论上计算出进动周期为

$$f_{\varphi} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta} \frac{1}{2\pi} = 0.467. \quad (13)$$

这与光变曲线频谱分析结果第1个峰所对应的频率一致. 第2个频率与刚体的对称性有关, 由图2可见, 椭球体模型进行主轴旋转时的光变曲线在一个自转周期内出现了两个波峰两个波谷, 这是由于椭球体关于其本体坐标系中的3个坐标平面对称, 转动 180° 后便与转动前的椭球完全重合. 当椭

球体进行非主轴旋转时, 一个周期内也会出现两个波峰两个波谷, 但进动角旋转 360° 后椭球体才会与转动前的椭球重合, 因此波峰与波谷的位置都会发生变化. 这种变化与小行星的形状、小行星相对于地球和太阳的位置有关.

为了验证理论的正确性, 改变形状参数、角速度矢量、地球与太阳的位置进行了数值模拟, 结果如图4所示. 可见, 改变参数后光变曲线的傅里叶分析结果与理论计算值完全吻合. 由图4可知, 对称情况下当模型的各个参数发生变化时, 光变曲线的形状发生改变, 部分情况下可能与主轴旋转光变曲线近似, 但傅里叶分析结果均呈现两个峰, 这两个峰所对应的频率存在2倍关系, 与理论计算结果一致. 同时可以注意到太阳、地球的位置对频谱分析结果无影响, 这是因为在本文采用的模型下小行星的自转状态与二者的位置无关.

3.2.2 非对称情形

非对称情况下, 对方程(6)进行求解通常利用角动量守恒与动能守恒消去变量, 过程中会涉及椭圆积分, 方程形式复杂, 难以观察其与光变曲线的联系. 为此, 本节借助哈密顿系统和Andoyer变量^[23]来描述小行星在无外力矩作用下的自由转动.

Andoyer变量的定义如图5所示. \mathbf{G}_1 为系统的角动量(下文使用 \mathbf{G}_1 的模 G_1 进行计算), H_1 为角动量在空间惯性系 Z 轴上的投影, L_1 为角动量在小行星本体主轴坐标系 z 轴上的投影, l_1 为角动量平面和本体主轴坐标系平面交点相对于 x 轴的角度. 基于Andoyer变量, 惯量主轴坐标系下刚体自由转动系统的哈密顿方程为

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 l_1}{A} + \frac{\cos^2 l_1}{B} \right) (G_1^2 - L_1^2) + \frac{L_1^2}{2C}, \quad (14)$$

其中 $A = I_1$ 、 $B = I_2$ 、 $C = I_3$. 方程(14)不显含变量 g_1 和 h_1 , 说明 G_1 和 H_1 是系统的守恒量, 即系统的角动量守恒.

由(14)式, 可以得到系统的哈密顿-雅可比方程:

$$\left(\frac{\sin^2 l_1}{A} + \frac{\cos^2 l_1}{B} \right) \left[\left(\frac{\partial S}{\partial g_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial l_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{2C} \left(\frac{\partial S}{\partial l_1} \right)^2 = \alpha_1, \quad (15)$$

其中 α_1 为常量, 在运动中守恒.

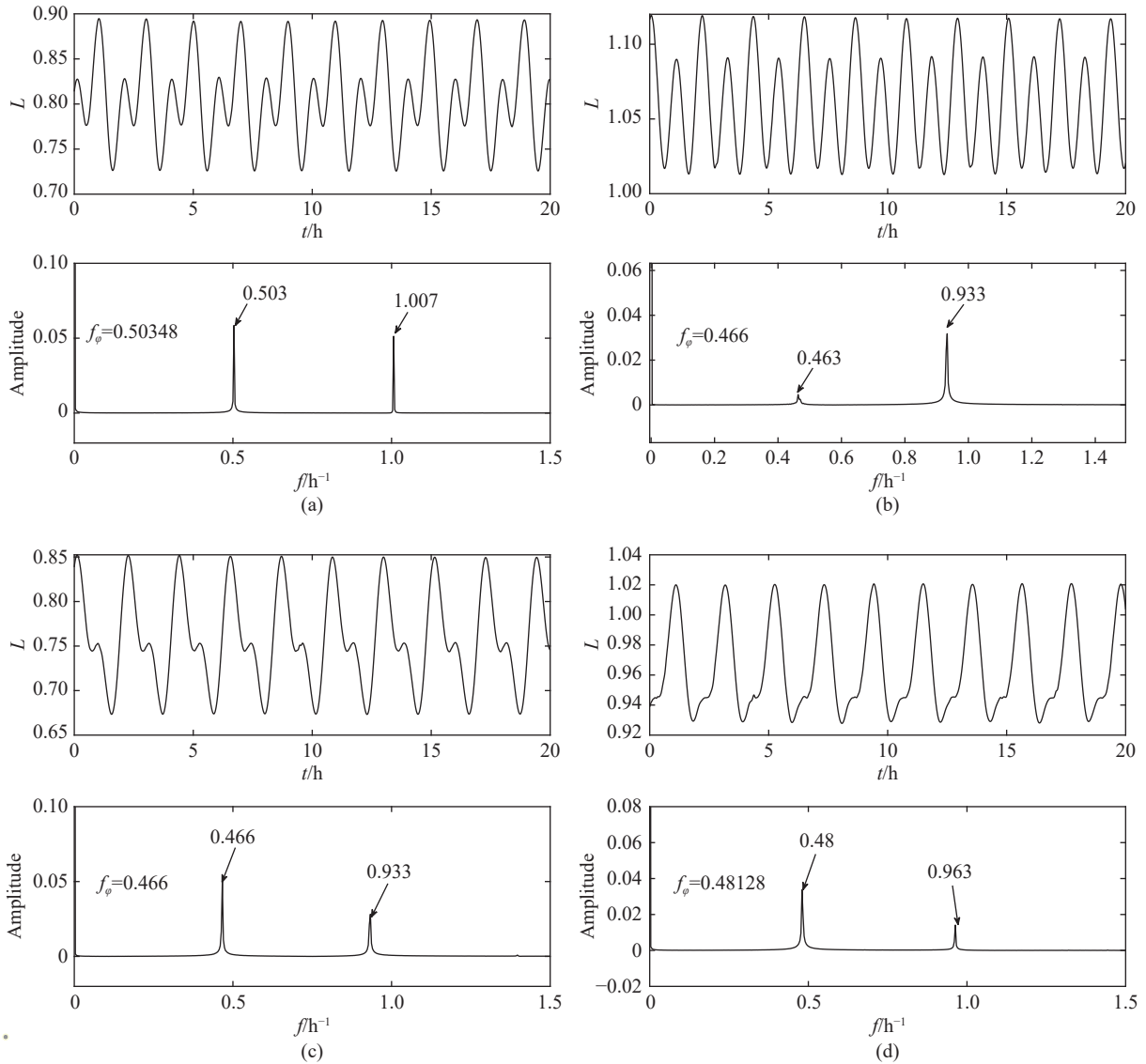


图 4 对称小行星的光变曲线及其频谱分析结果. 其中图(a)将形状参数调整为 $a = b = 1$ 、 $c = 0.5$; 图(b)将地球相对于小行星的方向改变为 $(10^\circ, 5^\circ)$; 图(c)将太阳相对于小行星的方向改变为 $(-20^\circ, 10^\circ)$; 图(d)将小行星的初始角速度在主体主轴坐标系内的指向改变为 $(75^\circ, 40^\circ)$. 其余参数的选取与图3一致. 通过理论计算得出的第1个峰所对应的频率 f_φ 已在各图中标出.

Fig. 4 Light curve and spectral analysis results of symmetrical asteroids. In panel (a), the shape parameters are adjusted to $a = b = 1$ and $c = 0.5$; panel (b) changes the orientation of the Earth relative to the asteroid to $(10^\circ, 5^\circ)$; panel (c) changes the direction of the Sun relative to the asteroid to $(-20^\circ, 10^\circ)$; panel (d) changes the orientation of the initial angular velocity of the asteroid in the body spindle coordinate system to $(75^\circ, 40^\circ)$. The selection of other parameters is consistent with Fig. 3. The frequency f_φ corresponding to the first peak calculated by theoretical calculation has been marked in each graph.

Kinoshita^[27]通过对该哈密顿-雅可比方程进行 t 的解析表达式:
两次变换并引入辅助参量, 得到 g_1 和 l_1 显含时间

$$l_1 = \tilde{l}_1 + \left(\frac{b+1}{4} + \frac{19b^3 - 3b^2 - 3b + 19}{256} e_1^2 \right) e_1 \sin 2\tilde{l}_1 + \left(\frac{b^2 + 6b + 1}{64} + \frac{5b^4 + 12b^3 - 2b^2 + 12b + 5}{512} e_1^2 \right) e_1^2 \sin 4\tilde{l}_1 + \dots, \tag{16}$$

$$g_1 = \tilde{g}_1 - \frac{\bar{G}_1}{\bar{L}_1} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{9b^2 - 2b + 9}{64} e_1^2 \right) e_1 \sin 2\tilde{l}_1 + \frac{b+1}{16} \left(1 + \frac{7b^2 - 6b + 7}{16} e_1^2 \right) e_1^2 \sin 4\tilde{l}_1 + \dots \right], \tag{17}$$

其中各参量为

$$\left\{ \begin{aligned} b &= \frac{\bar{G}_1^2}{\bar{L}_1^2}, \bar{G}_1 = G_1 = \alpha_2 \\ \bar{L}_1 &= \sqrt{\left[2\alpha_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \alpha_2^2 \right] D} \\ e_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) D \\ \frac{1}{D} &= \frac{1}{C} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \\ \tilde{l}_1 &= n_{\tilde{l}_1} (t + \beta_1) \\ \tilde{g}_1 &= n_{\tilde{g}_1} (t + \beta_1) + \beta_2 \end{aligned} \right. , \tag{18}$$

其中 β_1 、 β_2 为与初始状态有关的常数。

$$n_{\tilde{l}_1} = \frac{\pi \bar{L}_1}{2KD} \sqrt{(1 - e_1)(1 + be_1)}, \tag{19}$$

$$n_{\tilde{g}_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \bar{G}_1 - n_{\tilde{l}_1} \Lambda_0 + \frac{\bar{L}_1^2}{D\bar{G}_1}, \tag{20}$$

其中

$$\Lambda_0 = \frac{2}{\pi} [EF(\chi, k') + KE(\chi, k') - KF(\chi, k')], \tag{21}$$

$$\chi = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1 + e_1 b}{b(1 + e_1)}}, \tag{22}$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2}, k^2 = \frac{2e_1}{1 - e_1} \frac{b - 1}{1 + e_1 b}. \tag{23}$$

$F(\chi, k')$ 为第1类不完全椭圆积分, $E(\chi, k')$ 为第2类不完全椭圆积分. K 和 E 是模量为 k^2 的第1、2类完全椭圆积分.

参照对称情况下的非主轴旋转, 设置初值 $a = 1$ 、 $b = 0.9$ 、 $c = 0.6$, 初始角速度矢量 ω 在主体主轴坐标系中的指向取为 $(65^\circ, 40^\circ)$, 初始周期 $T_0 = 3\text{h}$, 此时有 $\omega = (0.678, 0.569, 1.8982)$. 将数据代入(19)与(20)式, 得到两个频率分别为 $n_{\tilde{l}_1} = -0.12803$ 和 $n_{\tilde{g}_1} = 0.45224$, 理论上这两个频率会体现在光变曲线中. 对光变曲线进行傅里叶频谱分析, 结果如图6(a)所示.

图6(a)中一共出现了4个峰, 经过对比分析, 第1个峰值频率对应 $2|n_{\tilde{l}_1}|$, 第2个峰值频率对应 $n_{\tilde{g}_1}$, 第4个峰值频率对应 $2n_{\tilde{g}_1}$. 第3个峰值频率与自转周期的选取有关, 该图中选取的自转周期初值为 $T_0 = 3\text{h}$, 第3个峰对应的频率为 $2/T_0$. 上述结果表明非主轴旋转小行星的自转运动有3个基本频率, 当小行星呈非对称形状时, 3个基本频率均会体现在光变曲线中. 对于图3中的对称小行星, 同样借助Andoyer变量进行计算, 结果分别为 $n_{\tilde{l}_1} = -0.1422$ 、 $n_{\tilde{g}_1} = 0.4661$, 其中频率 $n_{\tilde{g}_1}$ 与(13)式中的结果一致, 频率 $n_{\tilde{l}_1}$ 和 $1/T_0$ 虽然存在, 但不会对光

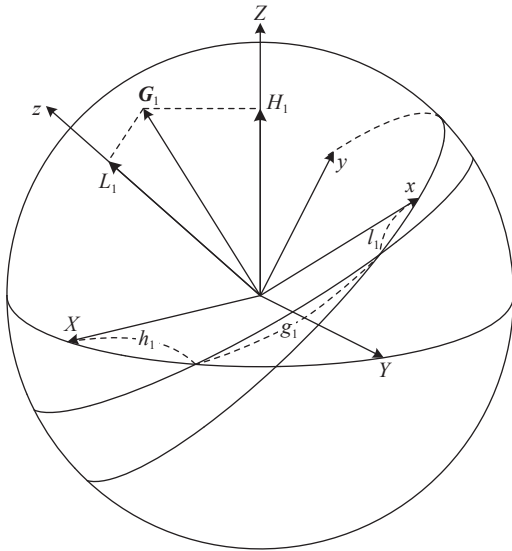


图 5 Andoyer变量

Fig. 5 Andoyer variables

在本文的分析中, 对于(16)与(17)两式只保留到零阶项, 模拟结果表明在一定误差范围内这种近似是合理的. (18)式中的 $n_{\tilde{l}_1}$ 与 $n_{\tilde{g}_1}$ 是需要求解的运动频率, Kinoshita^[27]已经给出了它们的表达式

变曲线产生影响, 不会体现在光变曲线中.

为了验证上述结论, 改变椭球体形状参数以及初始角速度矢量进行了光变曲线模拟, 结果如图6 (b)-(f)所示.

图6中频谱分析结果均与理论计算的基本频率吻合. 当改变 ω 时, 随着 ω 与本体坐标系 z 轴的夹角减小时, 频谱分析结果中的第1、2、4峰值均会减小, 这是由于 ω 与 z 轴的夹角越小, 椭球体的运

动越接近主轴旋转, 除了自转频率(第3个峰)其余频率均减小. 当二者完全重合时, 光变曲线只存在单一周期, 傅里叶分析结果只剩一个峰. 根据我们的取值, 图6 (f)中 z 轴与空间惯性系中角动量 L 的夹角保持在 6° 左右, ω 与 L 的夹角在 3° 以内, 3者接近重合, 已十分接近主轴旋转, 该图中的第1个峰已经几乎不可见.

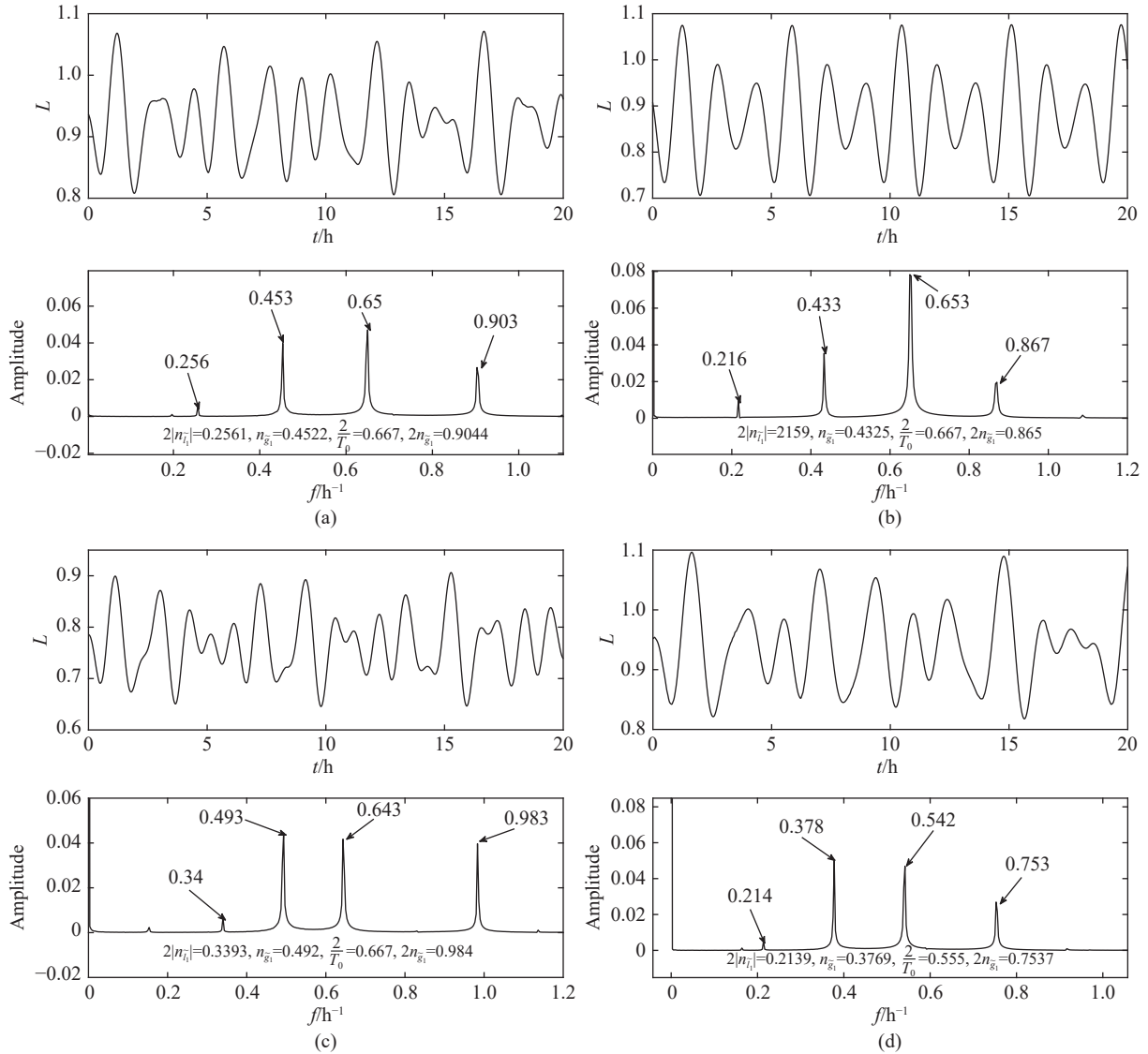


图 6 非对称小行星的光变曲线及其频谱分析结果. 理论计算得出的 $2|n_{i_1}|$ 、 n_{g_1} 、 $\frac{2}{T_0}$ 、 $2n_{g_1}$ 已经标注在各图中.

Fig. 6 Light curve and spectral analysis results of symmetrical asteroids. Theoretical calculation of $2|n_{i_1}|$, n_{g_1} , $\frac{2}{T_0}$, $2n_{g_1}$ have been marked in each panel.

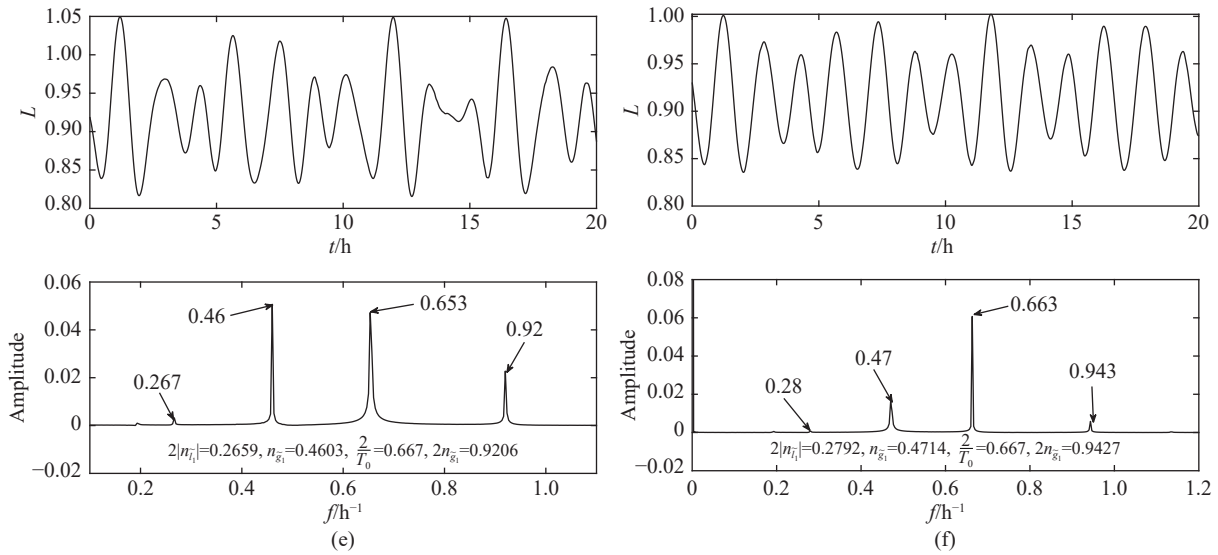


图 6 续

Fig. 6 Continued

对于非对称情形下非主轴旋转光变曲线中出现的3个频率,为了更好地从频谱分析结果中分辨它们,我们绘制了它们在形状与周期发生变化后的关系图如图7所示,由图可见,3个频率始终满足

$$2|n_{i_1}| < n_{g_1} < 2/T_0. \quad (24)$$

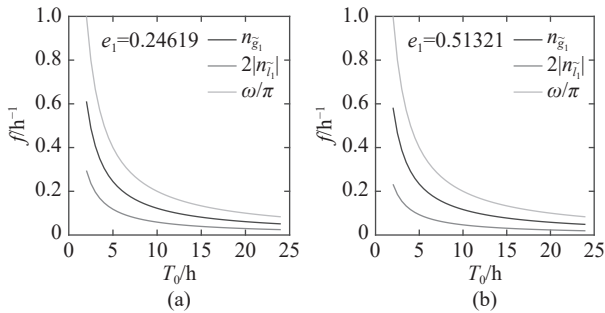


图 7 频率和自转周期的函数关系

Fig. 7 Frequency as a function of spin period

3.2.3 凸多面体小行星

对于不规则形状小行星,本文通过随机生成的凸多面体对其光变曲线进行了模拟,绘制了主轴旋转和非主轴旋转两种情况下的光变曲线.取自转周期为 $T_0=3\text{h}$,对光变曲线进行频谱分析.主轴旋转结果见图8,非主轴旋转结果见图9.

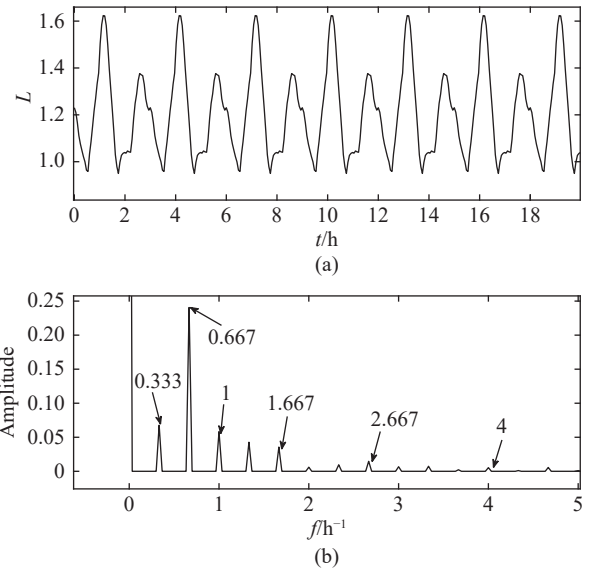


图 8 不规则小行星主轴旋转光变曲线

Fig. 8 Irregular asteroid principle axis rotation light curve

对于非主轴旋转,由于形状的变化并不会改变刚体进行非主轴旋转时的运动规律,且不规则多面体的惯量张量计算较为复杂,因此我们假定其主转动惯量为 $(1, 1.36, 1.64)$,即等效为 $a=1$ 、 $b=0.8$ 、 $c=0.6$ 的3轴椭球,同时角速度矢量 ω 初始指向为 $(65^\circ, 40^\circ)$.

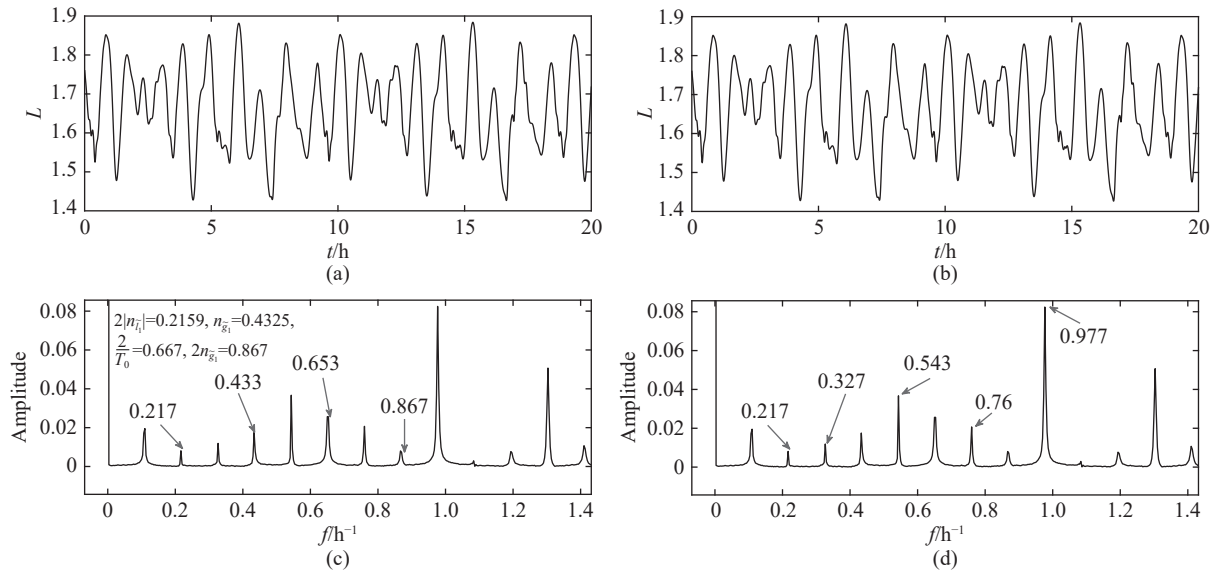


图 9 不规则小行星非主轴旋转光变曲线. 除了 $2|n_{i_1}|$ 、 n_{g_1} 、 $\frac{2}{T_0}$ 、 $2n_{g_1}$ 4 个频率外, 其余频率均为 n_{i_1} 的整数倍.

Fig. 9 Irregular asteroid non-principle axis rotation light curve. Except for the four frequencies $2|n_{i_1}|$, n_{g_1} , $\frac{2}{T_0}$ and $2n_{g_1}$, the remaining frequencies are integral multiples of n_{i_1} .

从图8和9可以看出, 主轴旋转时的光变曲线虽然不是正弦曲线, 但是频谱分析结果表明该曲线只有一个周期, 并且频谱分析结果中出现多个峰, 它们对应的频率均为 T_0^{-1} 的倍数. 而非主轴旋转的结果同样有多个峰出现, 且与理论计算值吻合. 这表明3轴椭球体模型的模拟结果同样适用于凸多面体模型.

4 形状和自转参数反演

下面采用Jurkevich方法^[28]来求解小行星的自转周期. 该方法没有关于采样间隔的假设, 同时也不依赖于小行星的自转状态与自身性质, 能很好地处理光变曲线这种非均匀观测的数据.

对于一个总观测次数为 N 的小行星, 记每个观测数据为 x_i , 观测时间记 t_i , 将所有观测数据叠加至一个试验周期 P 内:

$$t'_i = t_i \% P = t_i - \left\lfloor \frac{t_i}{P} \right\rfloor P, \quad (25)$$

其中 t'_i 为原观测时间在测试周期内对应的时间, $\%$ 为取模运算, $\left\lfloor \frac{t_i}{P} \right\rfloor$ 为向下取整.

将折叠后的数据分成 k 组并计算方差和:

$$V_k^2 = \sum_{l=1}^k V_l^2, \quad (26)$$

其中 V_l^2 为各组的方差. 当 V_k^2 的值达到最小时, 试验周期即为光变周期.

根据第2节建立的光度物理模型, 利用三角剖分将小行星表面离散化后的光度为^[19]

$$\mathcal{L}(t) = \sum f(\alpha(t)) S(\mu(t), \mu_0(t)) g_i = \sum \mathcal{A} g_i, \quad (27)$$

其中 \mathcal{A} 为待解的系数矩阵, g_i 为剖分后的面元, 形状反演也即最小化下式

$$\chi^2 = \|\mathcal{L} - \mathcal{A}g\|^2, \quad (28)$$

其中 \mathcal{L} 、 g 分别为包含所有观测结果和面元的向量.

为了减少待求解参数的数目, 提高运算效率, 借助高斯曲率与球谐级数^[19-29], 将(27)式化为

$$\chi^2 = \sum_j \left[\mathcal{L}_j - \left(\sum_i S(\mu, \mu_0) G(\vartheta_i, \psi_i) \Delta\sigma_i \right) \right]^2, \quad (29)$$

其中 (ϑ_i, ψ_i) 为球坐标系中第 i 个面元的单位外法向量 \mathbf{n}_i 的方向, $G(\vartheta_i, \psi_i)$ 为该面元的高斯表面密度^[29], $\Delta\sigma_i$ 为对应面元的面积. 对于凸多面体, 面元面积和其单位外法向量满足约束^[19]

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{n}_i g_i = 0, \quad (30)$$

该过程可以将待求解参数数目由 10^3 减少至 10^2 , 同时求出凸多面体各面的面积与外法向量, 之后进行两次凸多面体的对偶变换^[30]即可得到最终的凸多面体模型.

本文基于上述方法对小行星951(Gaspra)进行了形状反演. 反演得到的光变曲线和形状模型如图10所示. 该小行星的部分观测数据见表1. 对于该小行星自转周期的计算, 我们参考了Hanuš等^[6]的工作, 在4 h至12 h的范围内搜寻自转周期, 最终得到的周期为7.04 h, 与文献结果一致. 然后使用3轴椭球体模型寻找自转轴指向(以 3° 为间隔)和形状参数, 得到自转轴指向为 $(167^\circ.45, 28^\circ.65)$, 形状参数为 $b/a = 0.42$ 、 $c/a = 0.4$. 最后, 将3轴椭球体反演的参数作为初值代入凸多面体模型进行计算, 迭代收敛的自转轴指向为 $(172^\circ.45, 23^\circ.19)$.

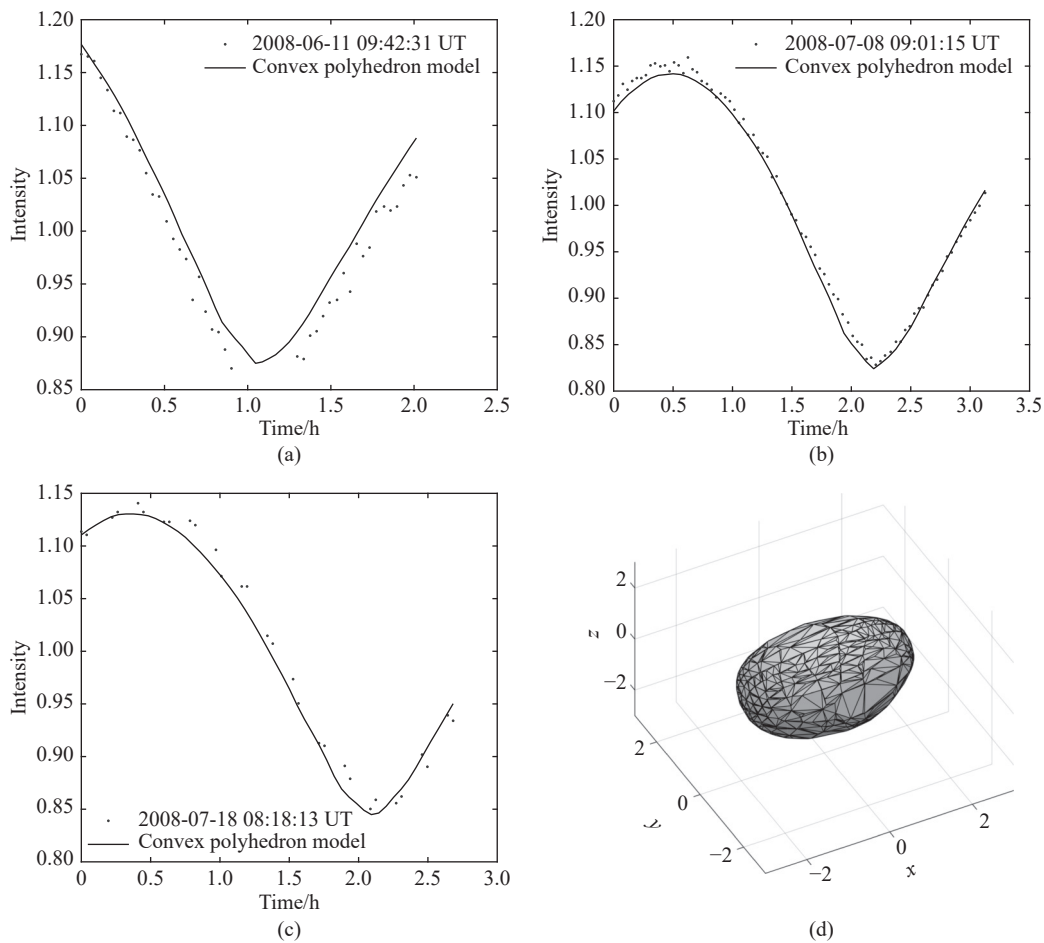


图 10 Gaspra反演结果. (d)为反演得到的小行星凸多面体模型, 其余图片展示了反演结果(实线)与观测数据的对比(散点).

Fig. 10 The inversion results for Gaspra. (d) Displays the convex polyhedral model of the asteroid derived from inversion, while the remaining panels illustrate the comparison between the inversion results (solid lines) and observational data (scatter points).

表 1 小行星Gaspra数据
Table 1 Asteroid Gaspra data

| Observation Time | Ra ^a /° | Dec ^a /° | α /° |
|---------------------|--------------------|---------------------|-------------|
| 2008-06-07 10:32:08 | 333.05 | -6.62 | 28.35 |
| 2008-06-11 09:42:31 | 333.98 | -6.05 | 28.07 |
| 2008-06-13 09:09:01 | 334.40 | -5.78 | 27.90 |
| 2008-06-15 09:09:57 | 334.82 | -5.50 | 27.70 |
| 2008-06-16 08:48:05 | 335.02 | -5.38 | 27.60 |
| 2008-06-17 08:35:05 | 335.22 | -5.25 | 27.49 |
| 2008-06-18 09:15:20 | 335.40 | -5.12 | 27.37 |
| 2008-06-28 08:17:47 | 336.98 | -3.88 | 25.83 |
| 2008-07-03 08:19:58 | 337.52 | -3.35 | 24.80 |
| 2008-07-08 09:01:15 | 337.88 | -2.87 | 23.56 |
| 2008-07-18 08:18:13 | 338.05 | -2.10 | 20.50 |

^a J2000 epoch

需要指出, 本文的形状反演建立在小行星进行主轴旋转的假设之上, 并不能排除小行星 Gaspra 进行非主轴旋转的情况, 对于非主轴旋转小行星的形状反演可以作为本工作的后续研究方向之一. 同时由于凸多面体模型的构建存在诸多简化, 并且在采用最小二乘法进行反演时可能陷入局部最优解, 这导致反演得到的曲线与实际观测曲线之间会存在一定的偏差.

5 结论

本文借助3轴椭球体模型对小行星的光变曲线进行分析, 探讨了模型的自转参数和形状对光变曲线的影响, 发现了特殊情况下光变曲线的自转轴指向存在镜像解. 然后基于小行星的自转状态, 对主轴旋转与非主轴旋转两种情况进行了研究, 利用快速傅里叶变换分析了两者的光变曲线特征, 对比了它们的不同点并总结了光变曲线的一般规律:

1. 对于主轴旋转的小行星, 傅里叶频谱分析结果显示只有一个频率, 无论它们的形状是否规则, 都可能出现多个峰;

2. 对于非主轴旋转的对称小行星(对称轴为其旋转主轴), 傅里叶频谱分析结果显示有两个峰, 但只存在一个频率;

3. 对于非主轴旋转的不规则小行星, 傅里叶频谱分析结果显示有4个及以上的峰值, 峰值对应的频率均为理论计算频率的整数倍.

最后, 基于Kaasalainen等^[19-20]的凸多面体模型, 结合3轴椭球体模型对小行星Gaspra的自转状态和形状参数进行反演, 最终得到了它的凸多面体形状模型.

光变曲线特征和小行星的自转、形状等参数之间的对应关系为认识、理解光变曲线提供了重要的先验信息, 进而有助于简化小行星参数反演的流程. 这方面的工作还有待进一步深入开展.

参考文献

- [1] Lagerros J S V. *A&A*, 1996, 310: 1011
- [2] Čapek D, Vokrouhlický D. *IAUC*, 2004, 2004: 171
- [3] Rozitis B, Green S F. *MNRAS*, 2011, 415: 2042
- [4] Rozitis B, Green S F. *MNRAS*, 2012, 423: 367
- [5] Vokrouhlický D, Nesvorný D, Bottke W F, et al. *AJ*,

^①数据来源: <https://minplanobs.org/mpinfo/php/lcdb.php>

- 2010, 139: 2148
- [6] Hanuš J, Brož M, Āurech J, et al. *A&A*, 2013, 559: A134
- [7] Farnocchia D, Chesley S R, Chodas P W, et al. *Icar*, 2013, 224: 192
- [8] Farnocchia D, Chesley S R. *Icar*, 2014, 229: 321
- [9] Bottke W F, Vokrouhlický D, Rubincam D P, et al. *AREPS*, 2006, 34: 157
- [10] Delbó M, Mueller M, Emery J P, et al. Asteroid Thermophysical Modeling//Patrick M, Francesca E D, William F B. Asteroids IV. Tucson: University of Arizona Press, 2015: 107–128
- [11] Delbó M, Mueller M, Emery J P, et al. Asteroids IV. Tucson: University of Arizona Press, 2015: 183–202
- [12] Cheng B, Yu Y, Asphaug E, et al. *NatAs*, 2021, 5: 134
- [13] Russell H N. *ApJ*, 1906, 24: 1
- [14] Groeneveld I, Kuiper G P. *ApJ*, 1954, 120: 200
- [15] Gehrels T. *AJ*, 1967, 72: 929
- [16] Taylor R C. Pole Orientation of Asteroids//Gehrels T. Asteroids. Tucson: University of Arizona Press, 1979: 480–493
- [17] Zappala V. *M&P*, 1981, 24: 319
- [18] Cellino A, Zappala V, Farinella P. *Icar*, 1989, 78: 298
- [19] Kaasalainen M, Torppa J. *Icar*, 2001, 153: 24
- [20] Kaasalainen M, Torppa J, Muinonen K. *Icar*, 2001, 153: 37
- [21] Lu X, Zhao H, You Z. *EM&P*, 2014, 112: 73
- [22] Muinonen K, Lumme K. *A&A*, 2015, 584: A23
- [23] Andoyer H. Cours de Mécanique Céleste. Paris: Gauthier-Villars et Cie, 1926: 54–72
- [24] Lumme K, Bowell E. *AJ*, 1981, 86: 1694
- [25] Muinonen K. *IAUS*, 1994, 160: 271
- [26] 梁昆淼. 力学: 理论力学. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2009: 189–194
- [27] Kinoshita H. *PASJ*, 1972, 24: 423
- [28] Jurkevich I. *Ap&SS*, 1971, 13: 154
- [29] Horn B K P. *Proceedings of the IEEE*, 1984, 72: 1671
- [30] Little J J. Proceedings of the Third AAAI Conference on Artificial Intelligence. Washington, DC: AAAI Press, 1983: 247–250

Simulation Analysis of Asteroid Lightcurve and Inversion of Shape Parameters

GAO Hao¹ ZHAO Shun-jing¹ LIAO Xin-hao² LEI Han-lun¹

(1 School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, Nanjing 210023)

(2 Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030)

ABSTRACT The light curve, which depicts the temporal variation of an asteroid’s brightness as observed through continuous monitoring over a defined period, serves as a valuable data source containing information about the asteroid’s orbital characteristics, rotational behavior, physical shape, and thermal properties. In this study, we develop a photometric model for asteroids by incorporating their three-dimensional shape, rotational state, and phase angle effects, with the primary objective of simulating and generating accurate light curves. Using a triaxial ellipsoid model as the theoretical framework, we analyze how various physical parameters influence the resulting light curve characteristics. Specifically, we investigate light curve variations under both principal axis rotation and non-principal axis rotation. Through this analysis, we establish quantitative relationships between the observed light curve features and the asteroid’s fundamental rotational and shape parameters. Building upon these findings, we perform parameter fitting of observed asteroid light curves using both the triaxial ellipsoid model and the more complex convex polyhedron model. This dual-model approach enables us to invert and determine the asteroid’s actual rotation parameters and shape characteristics from observational data.

Key words astrometry and celestial mechanics, planets and satellites: dynamical evolution and stability, minor planets, asteroids: individual: 951/Gaspra