

# 一种计算星座卫星星间链路日凌的快速算法\*

汤靖师<sup>1,2,3†</sup>

(1 南京大学天文与空间科学学院 南京 210023)

(2 现代天文与天体物理教育部重点实验室 南京 210023)

(3 南京大学空间环境与航天动力学研究所 南京 210023)

**摘要** 随着卫星技术的发展与成熟,星间链路(Inter-satellite Link, ISL)在导航卫星、通讯卫星等卫星星座中得到了广泛的应用,以此实现高效的星间通讯和测量.由于星间链路的建立或维持会受到日凌的影响,因此在卫星星座的设计、规划中往往需要对不同卫星、不同链路所受日凌的影响进行计算和预测,评估星间链路、系统服务受日凌的影响,更好地规划、设计相关业务.当前无论是利用成熟卫星系统设计工具搭建场景还是相关单位内部自研仿真系统,通常会基于外推星历逐个历元判断链路 with 太阳视线方向夹角,以此来判断和预测日凌.这一方式简单、直观、方便实现,但缺点是计算效率低下.虽然设计阶段的日凌计算并不需要十分准确的星历,通常基于二体模型外推卫星星历即可,但如果需要准确判断日凌可能发生的次数、时间、时长,那么往往要求卫星星历时间间隔很短,否则有可能错过持续时间不长的日凌,影响评估效果.针对日凌的判断和计算提出了一种快速算法.通过构造日凌发生、结束时刻卫星纬度辐角 $\alpha$ 满足的方程,解析判断日凌是否可能发生,计算日凌始末的卫星纬度辐角,快速实现对星间链路日凌存在性以及日凌始末时刻的计算.这一算法也需要事先外推星历,但星历步长只要不超过1个轨道周期即可.计算表明,该算法可以在稳定检测到比传统方法更多日凌的情况下将计算时间减少2~3个量级.即使外推星历的步长接近1个轨道周期,该方法也可以检测到超过99.9%的日凌弧段,且计算结果高度稳定,日凌发生时刻和持续时长偏差最大也不超过1 s.

**关键词** 天体力学, 方法: 解析, 航天器: 星间链路, 航天器: 日凌

**中图分类号:** P138; **文献标识码:** A

## 1 引言

卫星星间链路可以为卫星编队或星座提供高精度的星间测量,也可以实现卫星间的通讯.大地测量卫星GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment)<sup>[1]</sup>及GRACE Follow-On<sup>[2]</sup>利用编队卫星间的微波或激光链路,实现了高精度的星间测量,可以用于反演高精度的地球引力场.现代化的

导航卫星星座配备了星间链路<sup>[3]</sup>,在实现天地基联合定轨提高定轨精度的同时,为导航卫星星座的自主定轨、运行提供了支持<sup>[4-5]</sup>.近年来,低轨卫星星座成为提供导航增强<sup>[6]</sup>、卫星互联网(如星链卫星星座<sup>①</sup>)服务的首选,其业务也离不开星座卫星间的链路.

星间链路会受到日凌的影响,也就是当太阳接近卫星链路的视线方向时,星间链路的建立和/

2025-02-02收到原稿, 2025-05-06收到修改稿

\*国家自然科学基金项目(12233003)资助

†jstang@nju.edu.cn

①<https://www.starlink.com/technology>

或维持会受到干扰,这也会影响到卫星星座的整体服务性能.因此,评估卫星星座的服务性能通常都需要对至少1 yr内星座卫星间链路受日凌影响的情况进行计算与预测,由此优化星座卫星的设计和服务规划.

目前,专门讨论计算、判断星间链路是否受日凌影响的文献较少<sup>[7]</sup>.这可能是由于链路受日凌的影响可以以外推星历为基础,非常简单、直观地逐点判断.事实上,这也是目前分析日凌对星座业务性能影响等应用中常见的做法<sup>[8-9]</sup>.无论是利用成熟卫星系统设计工具搭建场景还是相关单位内部自研仿真系统,除了在判断日凌的几何判据方面和实现流程彼此稍有不同外,基于星历逐点判断的核心原理并无差异.这一方法的优点是简单、直观、方便实现,但缺点是计算量巨大.如需对日凌时长有比较准确的估计,不遗漏较短的日凌弧段,那么小步长的星历外推不可避免.以星链卫星星座这样规模巨大,拥有成千上万颗卫星的巨型星座为代表,如果需要评估1 yr内星座卫星各链路受日凌的影响,完成一轮日凌分析的计算量不可忽视.

文章尝试给出计算星间链路日凌的另一种思路.以建链卫星的纬度辐角(近地点辐角与真近点角之和,即 $u = \omega + f$ )为变量,通过建立显式的解析表达式,构造并求解其满足的方程(以下称为日凌方程),直接判断日凌的存在性并可以解析计算出日凌始末的纬度辐角.该方法依然需要事先外推星历,但星历步长可以极大提高,从传统的数秒到接近1个轨道周期,且日凌计算结果稳定,在不同步长下几乎没有变化.

## 2 相关模型及日凌方程

### 2.1 前提及假设

文章讨论的对象为星座卫星.日凌对星座卫星星间链路的影响主要体现在通讯、导航等业务运营等方面.预先计算不同卫星、不同链路受日凌影响的时段、时长,可以用于事先规划系统运行、业务运营等.从评估日凌对服务中断影响的需求角度,目前计算日凌的方法一般采用简化的

动力学模型,甚至是二体模型外推卫星轨道,但使用小步长以保证不遗漏持续时间较短的日凌弧段.

以该需求为基础,参照上述做法,建立日凌方程可以对轨道几何、观测几何以及动力学模型采取如下几点假设:

1. 卫星轨道外推使用二体模型,太阳的地心平赤道轨道使用解析形式的平均历表模型<sup>[10-11]</sup>;
2. 忽略太阳的地心视差,也就是认为太阳相对星座卫星的方向就是其地心位置矢量方向;
3. 卫星具有相同的轨道半长径 $a$ , 偏心率 $e$ 及轨道倾角 $i$ .为了方便起见,后续全部假设为圆轨道;
4. 卫星轨道升交点赤经之差 $\Delta\Omega$ 及纬度辐角之差 $\Delta u$ 是恒定的.

前面提到的需求解释了上述第1条假设,下面补充说明采用这几条假设的原因.首先,按照现有通讯、导航卫星星座,包括低轨互联网卫星星座的构型,假设圆轨道意味着忽略了 $\mathcal{O}(10^{-3})$ 量级的偏心率.这一量级和地球 $J_2$ 项摄动相当,在二体模型假设下,这一近似并不会带来额外的误差.并且是否忽略 $\mathcal{O}(10^{-3})$ 量级的偏心率不影响轨道周期,只影响卫星在轨道周期内的具体位置,产生不超过 $\mathcal{O}(10^{-3})$ 量级的位置误差(以地球半径为单位).对于判断、计算日凌所需的星座卫星的相对相位、太阳相对卫星的视向角度而言影响更小.除此以外,从2.2节及附录的公式推导过程可以看出,保留 $e$ 除了增加方程形式的复杂程度外,对方程的构造和求解并没有实质的影响.

其次,对地心距8000 km的卫星,太阳的地心视差约为 $5 \times 10^{-5}$  rad;对12 h中高度地球轨道卫星(Medium Earth Orbit, MEO),太阳的地心视差不超过 $2 \times 10^{-4}$  rad.这一偏差远小于判定日凌的临界夹角,后者可取 $3^\circ$ 至 $5^\circ$ .也小于实际中偏心率、动力学模型等其他因素可能产生的误差.图1展示了星座卫星与太阳的几何关系,其中角度 $\psi$ 表示星间链路与太阳方向的夹角.

第三,卫星具有相同的 $a$ 、 $e$ 、 $i$ 是Walker星座的特征之一,是合理的假设.即使不是Walker星座,不满足这一条件,和 $e = 0$ 的假设一样,实际推导公式的过程也并不会受到实质的影响.除了公式表达更加复杂一些外,方程的构造和求解没有

本质的困难.

关于最后一条假设, 可以发现在第1条和第3条假设之下, 第4条假设是自然成立的. 因此对于Walker星座, 这一条是自然成立的, 无论是GPS、星链一期等Walker-Delta星座, 还是铱星这样的Walker-Star星座皆然. 即便对于星链二期特殊设计的星座<sup>[12-13]</sup>也依然成立. 这意味着文中的方法可以很好地适用于常见的卫星星座.

第4条假设的核心是除了卫星纬度辐角( $u = \omega + f$ , 即近地点辐角与真近点角之和)为快变量外, 诸如卫星其他轨道根数、太阳轨道根数、建链卫星之间的 $\Delta\Omega$ 及 $\Delta u$ 等参数都是慢变的, 因此可以逐段(而无须逐点)解算日凌方程. 所以即使不是星座卫星, 只要两者的轨道根数满足这一前提, 下文的推导和结论依然是适用的.

## 2.2 轨道及观测几何

日凌的发生取决于星座卫星及太阳之间的几何关系. 对于建链卫星 $S_1$ 及 $S_2$ , 卫星与太阳之间的几何关系如图1所示.

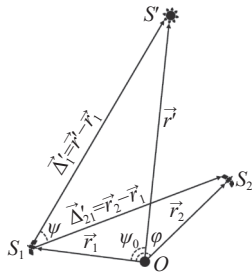


图1 星座卫星与太阳的几何关系, 其中 $S_1$ 、 $S_2$ 为两颗星座卫星,  $O$ 和 $S'$ 分别为地球与太阳,  $\vec{r}_1$ 、 $\vec{r}_2$ 及 $\vec{r}$ 分别是卫星 $S_1$ 、 $S_2$ 及太阳的地心位置矢量,  $\vec{\Delta}_1$ 及 $\vec{\Delta}_{21}$ 分别为太阳和卫星 $S_2$ 相对卫星 $S_1$ 的位置矢量,  $\psi$ 和 $\varphi$ 分别为太阳和 $S_2$ 相对 $S_1$ 的夹角以及卫星 $S_1$ 和 $S_2$ 的地心夹角.

Fig. 1 Geometry of constellation satellites and the Sun, where  $S_1, S_2$  are two constellation satellites,  $O$  and  $S'$  are the Earth and the Sun, respectively. Symbols  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  and  $\vec{r}$  are geocentric position vectors of  $S_1, S_2$  and the Sun, respectively. The span between the Sun and  $S_2$  with respect to  $S_1$  is denoted as  $\psi$  and that the span between the geocentric position vectors of both satellites is denoted as  $\varphi$ .

判断链路 $S_1S_2$  (表示 $S_1$ 出发, 指向 $S_2$ 的链路, 下同)是否受日凌影响, 可以通过 $\vec{\Delta}_1$ 与 $\vec{\Delta}_{21}$ 的夹角 $\psi$ 来判断, 即

$$\cos \psi = \langle \hat{\Delta}'_1, \hat{\Delta}'_{21} \rangle, \quad (1)$$

其中

$$\hat{\Delta}'_1 = \frac{\vec{r}' - \vec{r}_1}{\|\vec{r}' - \vec{r}_1\|} = \frac{\vec{r}' - \vec{r}_1}{\sqrt{r'^2 + r_1^2 - 2r'r_1 \cos \psi}}, \quad (2)$$

$$\hat{\Delta}'_{21} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \varphi}},$$

公式中的符号见图1, 且 $r' = \|\vec{r}'\|$ ,  $r_1 = \|\vec{r}_1\|$ ,  $r_2 = \|\vec{r}_2\|$ .

代入(1)式, 可得

$$\cos \psi = \frac{(\vec{r}' - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\sqrt{r'^2 + r_1^2 - 2r'r_1 \cos \psi} \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \varphi}}. \quad (3)$$

忽略地心视差及卫星轨道偏心率, 则(3)式可简化为

$$\cos \psi = \frac{\hat{r}' \cdot (\hat{r}_2 - \hat{r}_1)}{2 \sin(\varphi/2)}. \quad (4)$$

上式右边和卫星所处位置有关. 由于动力学模型采用二体模型且假设 $\Delta u$ 不变, 可以将卫星的位置变化归结为 $S_1$ 的纬度辐角 $u_1 = \omega_1 + f_1$ 的变化. 定义 $\psi^*$ 为日凌边界处的临界夹角, 那么日凌方程即为

$$\cos \psi^* = \frac{\hat{r}' \cdot (\hat{r}_2 - \hat{r}_1)}{2 \sin(\varphi/2)}. \quad (5)$$

下面需要做的就是由(5)式给出解析计算日凌边界处 $u_1$ 的算法.

## 2.3 日凌方程——解法及应用

重新整理日凌方程(5)式可以将 $S_1$ 的纬度辐角 $u_1$ 显式表达出来. 为简化正文表达, 推导过程整理在附录中. 借助一系列变换, 日凌方程(5)式可以表达为

$$K_q \cos(2u_1 + q) = M_u, \quad (6)$$

其中 $K_q$ 、 $q$ 、 $M_u$ 是由卫星、太阳轨道中不变量及慢变量组合得到的参数, 具体可见附录中的(24)及(26)式. 在已有外推星历的情况下, 这些参数都是已知的, 并且可以认为在星历节点之间的一段时间内是不变的.

(6)与(5)式并不完全等价,不仅包含了(5)式的解( $S_1S_2$ 链路的日凌),也包含了与其反向的 $S_2S_1$ 链路的日凌解.后者在评估日凌对业务的影响时也是需要的,所以下面直接讨论(6)式.

该方程的解明确对应 $S_1$ 的纬度辐角 $u_1$ ,因此下文在描述(6)式的解时,在不产生歧义的情况下,忽略下标中的“1”.方程(6)式的解存在下面几种可能,其中上标“(1)”和“(2)”分别表示第几对解(通常有两对解),下标“a”和“b”分别表示日凌开始和日凌结束.

1. 当 $|M_u/K_q| \geq 1$ 时,方程无解,链路 $S_1S_2$ 及 $S_2S_1$ 不存在日凌.其中等号对应临界情形,亦按无日凌处置;

2. 当 $0 \leq |M_u/K_q| < 1$ 时,方程有4个解,可分两对.记 $\cos^{-1}(M_u/K_q)$ 的主值为 $\beta$  ( $\beta \in (0, \pi)$ ),则两对解分别为 $\frac{1}{2}(\pm\beta - q)$ 和 $\pi + \frac{1}{2}(\pm\beta - q)$ .由于 $M_u/K_q$ 符号不同, $\beta$ 主值的象限不同,解的含义也不同,所以下面分别讨论.

(a) 当 $M_u/K_q = 0$ 时,两对解分别为:

$$\begin{aligned} u_a^{(1)} &= -\pi/4 - q/2, & u_b^{(1)} &= \pi/4 - q/2. \\ u_a^{(2)} &= 3\pi/4 - q/2, & u_b^{(2)} &= 5\pi/4 - q/2. \end{aligned} \quad (7)$$

(b) 当 $0 < M_u/K_q < 1$ 时, $\beta$ 主值在 $(0, \pi/2)$ 内,两对解分别为:

$$\begin{aligned} u_a^{(1)} &= \frac{1}{2}(-\beta - q), & u_b^{(1)} &= \frac{1}{2}(\beta - q). \\ u_a^{(2)} &= \pi + \frac{1}{2}(-\beta - q), & u_b^{(2)} &= \pi + \frac{1}{2}(\beta - q). \end{aligned} \quad (8)$$

(c) 当 $-1 < M_u/K_q < 0$ 时, $\beta$ 返回值在 $(\pi/2, \pi)$ 内,两对解分别为:

$$\begin{aligned} u_a^{(1)} &= \frac{1}{2}(\beta - q), & u_b^{(1)} &= \frac{1}{2}(-\beta - q). \\ u_a^{(2)} &= \pi + \frac{1}{2}(\beta - q), & u_b^{(2)} &= \pi + \frac{1}{2}(-\beta - q). \end{aligned} \quad (9)$$

(7)~(9)式中每个方程的两组解分别对应 $S_1S_2$ 和 $S_2S_1$ 两条链路的日凌.采用附录中(16)~(18)式定义的符号, $K \cos(u_1 + \alpha) > 0$ 对应 $S_1S_2$ 链路日凌, $K \cos(u_1 + \alpha) < 0$ 对应 $S_2S_1$ 链路日凌.

在解算出 $S_1$ 在日凌始末的纬度辐角后,在圆

轨道假设下,以 $S_1$ 星历中该段弧的轨道根数为参考,可以直接利用下面的公式计算上述纬度辐角对应的时间.以计算 $u_a^{(1)}$ 对应的时间 $t_a^{(1)}$ 为例,

$$t_a^{(1)} = t_0 + \Delta t = t_0 + \frac{1}{\sqrt{\mu/a_0^3}}(u_a^{(1)} - u_0), \quad (10)$$

其中 $\mu$ 是地心引力常数, $a_0$ 、 $u_0$ 分别是 $S_1$ 在 $t_0$ 时刻的轨道半长径和纬度辐角.如果考虑偏心率,则“转移时间” $\Delta t$ 也可以利用Lambert方程求解.Lambert方程在文献中有广泛的讨论,解法成熟<sup>[14-15]</sup>,这里不再赘述.

日凌方程(5)或(6)式的结果,对应的是将方程中其他参数看作常数的情况下链路出现日凌时卫星 $S_1$ 在日凌始末端的纬度辐角.在实际应用过程中,由于卫星、太阳轨道参数的缓慢变化,日凌方程需要分段构造并判断、求解.一套可供实际使用参考的流程如图2所示,下面分别介绍每步的含义.

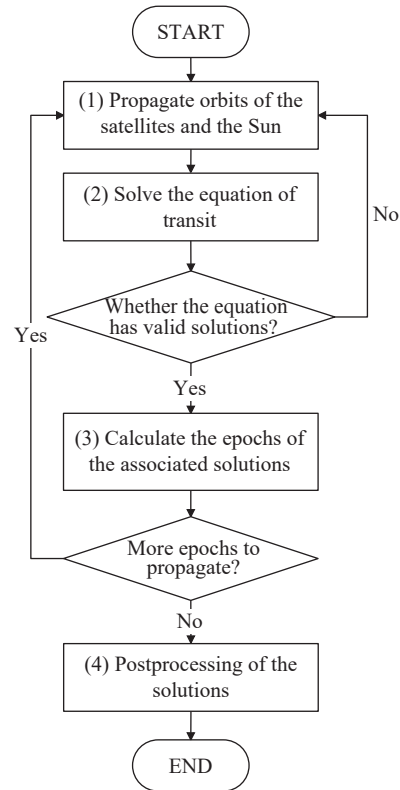


图 2 实际中使用日凌方程的流程图. 数字编号开头的步骤在文中有说明.

Fig. 2 A flowchart of applying equation of transit in practice. Numbered steps are explained in the text.

1. 外推卫星及太阳轨道至下一历元. 虽然文中采用二体模型及平轨道模型分别外推星座卫星和太阳的轨道, 但在这一步完全可以采用其他适用的外推方法, 比如考虑复杂摄动的数值方法、分析方法或者半分析方法. 相比传统的小步长外推轨道并逐步判断日凌, 文中方法可以快速判断某一历元附近的日凌情况, 因此可以逐段计算. 这意味着此时轨道外推的步长不必限制在几秒, 可以放宽至分钟量级甚至更久. 事实上, 由于日凌在一段时间内会连续出现, 因此只要不与相邻轨道周期混淆, 星历间隔可以放宽至接近1个轨道周期.

2. 求解日凌方程. 这一步对应本小节前述关于解算(6)式的讨论. 由于(6)式解出的是一段时期内(在方程其他“常数”参数适用的时段内)的日凌, 因此在前一步星历间隔不太大的情况下, 可能出现多个时间节点对应同一组日凌. 不同历元构造的(6)式中, “常数”参数总归是有差异的, 因此这些日凌解彼此间会存在微小的差别. 解决这一差异的一个根本办法是迭代, 这样不同历元得到的解可以收敛到同一个时刻. 不过这些参数都是卫星轨道慢变量和太阳轨道的辐角, 变化慢. 即使是其中相对较快的卫星轨道升交点赤经、近地点辐角, 1个轨道周期内的变化也不超过 $10^{-2}$  rad. 对于实际应用来说, 由于某一次日凌在真实发生时刻的前后节点都可以检测到, 因此将这几组相近的日凌解求平均即可. 下一节的算例中, 日凌时刻的结果只求平均, 不迭代(6)式.

3. 日凌方程(6)式的解是日凌始末卫星 $S_1$ 的纬度辐角, 实际中需要转换至对应的历元. 这一步在前面已有讨论, 简单采用(10)式即可. 这里不再展开.

4. 日凌解的后处理. 第2步中提到, 在星历间隔不太大时, 存在多个历元的日凌方程对应同一日凌的情况, 因此需要在完成图2中的循环后汇总处理所有日凌解, 得到最终的日凌发生次数及时段等信息. 值得一提的是, 图2中的第2步至第4步是通过日凌方程解析求解日凌特有的步骤, 从操作细节上看并不比传统的逐步判断简单. 可以判断, 当星历步长很小时, 本方法并不占优势. 但从原理上已经可以看出, 本方法可以采用远超过传

统方法的步长外推卫星星历且不损失日凌弧段, 从而赢得极大的计算效率优势. 这一点会在下一节的仿真算例中展示.

## 3 日凌算例

### 3.1 算例设计

本节将传统算法与提出的基于日凌方程的快速算法进行对比, 为方便指代, 下文将传统的逐步判断方法称为“数值法”, 将基于解析求解日凌方程的方法称为“解析法”.

首先, 利用仿真算例比较数值法和解析法的计算性能、结果方面的差异. 算例采用表1中列出两颗卫星, 模拟高度约为1122 km、圆轨道、轨道面间隔和异轨相邻卫星相位差均为 $30^\circ$ 的Walker星座中的两颗建链卫星, 其中 $a$ 、 $e$ 、 $i$ 、 $\Omega$ 、 $\omega$ 和 $M$ 分别表示卫星轨道的半长径、偏心率、倾角、升交点赤经、近地点幅角和平近点角. 以 $S_1$ 与 $S_2$ 之间的双向链路作为研究对象, 比较数值法和解析法两种方法在日凌的存在性、日凌次数、开始时刻、日凌时长以及计算效率方面的差异.

表 1 算例中采用的星座卫星轨道初值, 对应历元为2025年1月1日UTC零时.

Table 1 Initial elements of constellation satellites used in the tests, 2025-01-01 00:00:00 (UTC).

Satellite ID	$a/\text{km}$	$e$	$i/^\circ$	$\Omega/^\circ$	$\omega/^\circ$	$M/^\circ$
$S_1$	7500	0	40	0	0	0
$S_2$	7500	0	40	30	0	30

算例中卫星轨道的外推均采用二体模型, 这是目前日凌计算中的常用策略, 也符合相关卫星星座业务对日凌计算的需求. 算例中同时考察不同星历间隔(外推步长)对计算结果和计算效率的影响, 步长选择包括0.1 min、1 min、10 min、45 min、60 min及90 min, 共6种. 外推时长为365 d.

仿真算例用来比较两种方法在不同星历步长下的差异以及解析方法在不同星历步长下结果的稳定性, 分别见3.2节和3.3节.

其次,使用SpaceX于2025年4月10日21时21分(UTC)发布在space-track.org的星链卫星预报星历,分别利用数值法和解析法对离散星历进行日凌计算.星链的预报星历主要用于其他卫星运行商计算、评估各自卫星与星链卫星的碰撞风险,动力学模型包括相对完整的摄动力模型以及星链卫星可能实施的连续小推力<sup>[16]</sup>.每个星链卫星预报星历文件的时间跨度一般为72 h,时间间隔1 min.

目前在轨的星链卫星包括两期的卫星星座,每期卫星星座由多个壳层组成<sup>[12-13, 16]</sup>,其中一期星

座每个壳层均为Walker星座.SpaceX并未发布实际部署的星座/壳层结构以及星历文件所属卫星与星座/壳层的对应关系,因此参考SpaceX在美国联邦通信委员会提交的星链一期卫星星座的备案信息,并依据近年来两行根数中星链卫星的实际轨道数据,本节算例使用星链一期第4壳层中轨道升交点赤经间隔约220°的两个轨道面<sup>②</sup>,分别命名为轨道面A和B.每个轨道面中共有18颗卫星,各自NORAD (North American Air Defense Command)编号见表2.

表 2 用于日凌计算的星链卫星NORAD编号,依次为Walker星座相位编号1至18

Table 2 NORAD ID of Starlink satellites used to calculate transits, from phase slot 1 to slot 18 of a Walker configuration

Plane ID	Satellite NORAD ID
A	54095, 54098, 54102, 54099, 54079, 54082, 54081, 54088, 54083, 54085, 54087, 54092, 54090, 54089, 54094, 54096, 54093, 54100
B	53268, 53267, 53250, 53249, 53252, 53251, 53253, 53256, 53255, 53258, 53260, 53257, 53262, 53264, 53261, 53263, 53266, 53265

算例中对每个轨道面内的18颗卫星计算前后两颗星的星间链路所受日凌的情况,即01星对02星、02星对03星、...、18星对01星.计算结果见3.4节.

本节所有算例中,日凌的临界夹角,即(5)式中的 $\psi^*$ 均取为5°.

### 3.2 两种方法在不同步长下解算的结果

首先比较两种方法的计算耗时.为了消除单次计时的偏差,两种方法均对所给算例连续运行10次,比较单次平均耗时.计算环境为常规笔记本电脑,测试代码使用MATLAB编写<sup>③</sup>.数值法中轨道外推、每个节点的日凌判断及每段日凌的始末点判断计入耗时,解析法计入耗时的步骤为图2的全流程.计时结果如表3所示.

表 3 两种方法运行算例的单次平均耗时

Table 3 Average per-run time consumption of given test using the two methods

Step size	Numerical method/s	Analytical method/s
0.1 min	7.8188	21.6057
1 min	0.7354	2.0836
10 min	0.0714	0.2419
45 min	0.0169	0.0797
60 min	0.0133	0.0682
90 min	0.0084	0.0525

在相同步长下,解析法的耗时大约为数值法的3至6倍.这也印证了2.3节的讨论,也就是解析法每步求解日凌方程以及最终统计日凌弧段的耗时并不少于数值法每步通过点乘判断日凌(如(1)

<sup>②</sup>星历文件名SpaceX'Ephemeris'552'SpaceX'2025-04-10UTC21'21'03'\*\*.zip,其中\*\*表示01至15.第4壳层轨道高度约540 km,轨道倾角约53°.2,相邻轨道面升交点赤经间隔5°,每个轨道面实际部署18颗星.

<sup>③</sup>具体运行环境如下.中央处理器:13代酷睿i7-1360P,基准频率2.2 GHz;操作系统:Windows 11 (23H2);编程工具:MATLAB R2023a,使用tic/toc对日凌计算核心步骤计时.数值法每个节点上直接比较余弦值,避免反三角函数的计算耗时.

式)的耗时. 表中耗时差距随着步长增大而增大的另一个原因是随着步长增大, 数值法能检测到的日凌越来越少, 因此用于统计日凌弧段的额外开销也会减少.

相同步长下解析方法耗时较多并不影响解析方法在日凌检测方面整体的效率优势. 表4列出了在不同步长下, 数值方法和解析方法检测到的日凌弧段数. 可以发现在列出的仿真测试中, 当步长超过1 min时, 数值法给出的结果已基本不可用. 但解析方法给出的日凌弧段数相当稳定, 即使步长取90 min (算例中卫星轨道周期为107.7 min), 检测结果相比0.1 min步长的结果也只少了2个, 依然能够检测到几乎(超过99.9%)所有的日凌弧段.

表 4 两种方法检测到的日凌弧段数  
Table 4 Counts of transit arcs detected using two methods

Step size	Link $S_1S_2$		Link $S_2S_1$	
	Numerical	Analytical	Numerical	Analytical
0.1 min	2879	2883	2879	2883
1 min	2800	2883	2811	2883
10 min	670	2883	675	2883
45 min	149	2882	149	2882
60 min	113	2881	113	2881
90 min	77	2881	75	2881

进一步分析两种方法解算出的结果, 将0.1 min步长得到的日凌时刻及时长作于图3中.

从图中可以看出, 两种方法得到结果是一致的. 但解析方法得到的结果更加“平滑”, 而数值方法得到的结果则表现出一定的“阶梯”形式. 选取图中前10 d的结果放大, 得到图4.

观察图4, 可以发现其中数值方法结果的“阶梯”来自其外推星历的间隔. 具体来说, 数值方法检测到的日凌始末点只能在星历的节点上. 图4的算例使用了0.1 min的步长计算外推星历, 那么其“阶梯”的间隔就为6 s. 相比之下, 解析方法计算出的日凌始末点基本不受外推星历间隔的限制. 星历只是为构造、解算日凌方程提供参考点, 实际解出的日凌始末点不受星历节点的限制, 所以从

整体来看是“平滑”的, 可以描绘出日凌的实际边界.

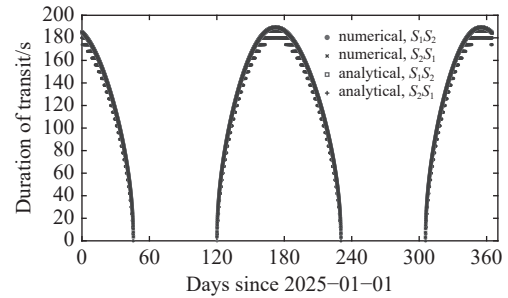


图 3 数值法和解析法得到的日凌结果. 其中横轴和纵轴分别表示日凌开始的时刻(距离2025年1月1日UTC零时的天数)和日凌持续的时长(s). 圆圈( $\circ$ )和方形( $\square$ )分别表示数值法和解析法得到的 $S_1S_2$ 链路结果, 叉号( $\times$ )和加号( $+$ )分别表示数值法和解析法得到的 $S_2S_1$ 链路结果.

Fig. 3 Transits solved using the numerical and analytical methods, where the  $x$  and  $y$  axes respectively mean the starting epochs of the transit (in elapsed days since 2025-01-01 00:00:00 (UTC)) and the duration of the transit (in seconds). Circles ( $\circ$ ) and squares ( $\square$ ) respectively stand for the transits of  $S_1S_2$  links solved using the numerical and analytical methods, while cross ( $\times$ ) and plus ( $+$ ) signs respectively for transits of  $S_2S_1$  links solved using the numerical and analytical methods.

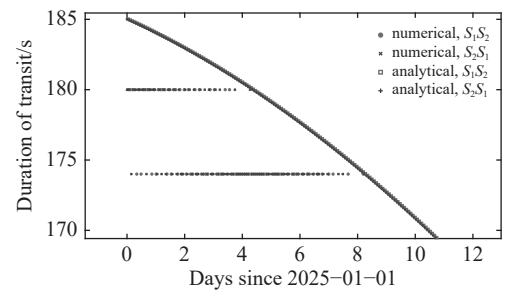


图 4 图3中前10 d结果的放大, 其中符号和图例与之相同.

Fig. 4 Zoom-in image of the first 10 days in Fig. 3, with the same symbols and legend.

由于日凌方程直接得到的结果是始末点的纬度辐角, 不加限制的情况下可以有无数解满足此相位条件. 在应用时考虑到实际情况下方程中参数的缓慢变化, 可以计算星历节点附近1个轨道周期内的时刻. 这也是文中算例将最大步长设置为不超过轨道周期的原因.

最后讨论两种方法检测到的日凌弧段数的差异. 当步长缩小至0.1 min时, 数值法相比解析法每

条链路依然少检测出4次日凌. 容易理解, 数值法缺失的日凌一定是从边缘日凌时长较短的部分开始, 也就是从图3中的4个零点附近开始. 选取300 d附近的零点放大, 得到图5.

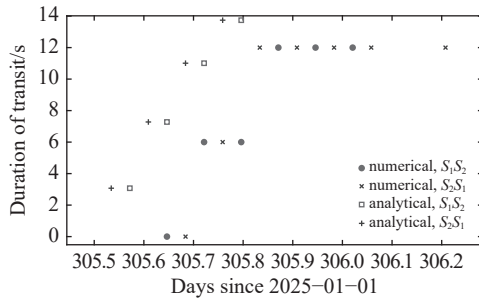


图 5 图3中第300 d附近的零点放大, 其中符号和图例与之相同.

Fig. 5 Zoom-in image of the zero-point near the 300th day in Fig. 3, with the same symbols and legend.

图5中展示的解析法结果呈平滑、连续分布, 而数值法检测出的解依然是“阶梯”状分布. 图中数值法检测出的第1段日凌持续时间为零, 表示该点是外推星历中唯一落在这段日凌中的点, 所以同时被判定为起始点和结束点. 不难发现这个零点附近, 解析方法检测出的 $S_1S_2$ 链路中第1段日凌以及 $S_2S_1$ 链路中前两段日凌都未被数值方法检测出. 类似情况在另3个零点附近也有出现, 最终表现为表4中数值方法和解析方法结果的差别.

### 3.3 解析法在不同步长下结果的差异

表4展示了解析方法在不同步长下统计出的日凌弧段数高度一致, 本小节进一步比较不同步长下的日凌结果, 评估解析方法的稳定性. 图6展示了以0.1 min步长星历结果为参照, 相同的解析方法下使用1 min步长星历所得结果与之比较的差异, 其中上图展示的是 $S_1S_2$ 链路的结果, 下图展示的是 $S_2S_1$ 链路的结果.

不难发现, 虽然这两种步长下星历节点的时刻之差可高达54 s, 但解算出的日凌开始时刻之差绝大多数都在 $\pm 0.005$  s之内, 最大不超过 $\pm 0.02$  s; 日凌持续时长之差也基本不超过 $\pm 0.005$  s, 最大不超过 $\pm 0.05$  s. 差异较大的点发生在日凌始末边缘处. 这意味着两种步长对解析方法解算日凌确实没有显著影响, 结果高度一致. 除此以外,  $S_1S_2$ 与

$S_2S_1$ 两条链路的结果非常相似.

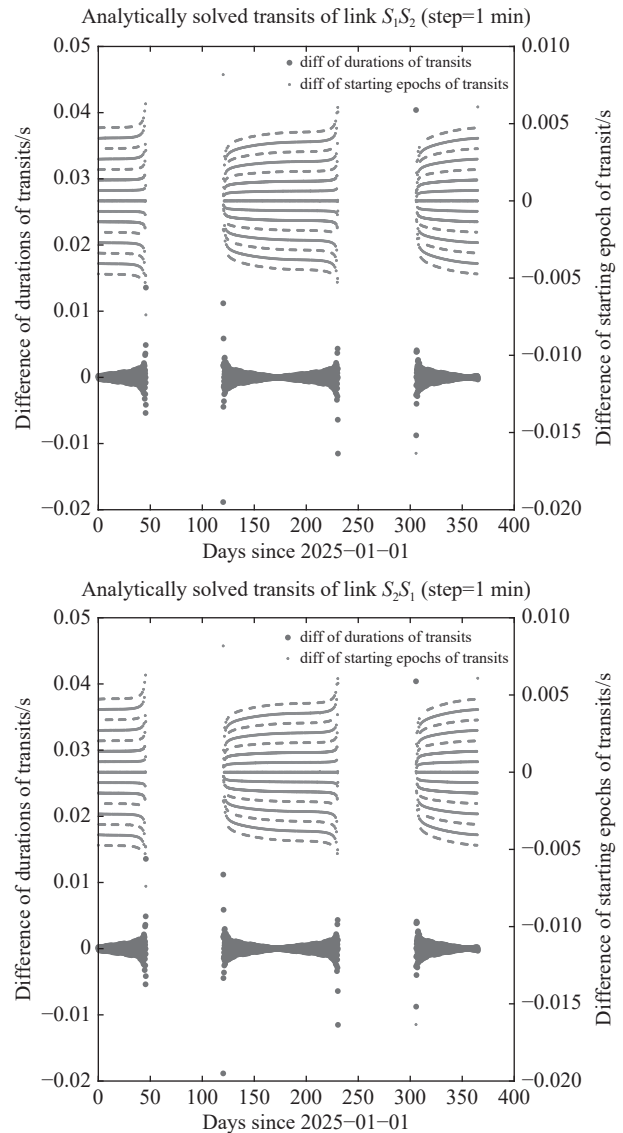


图 6 解析方法使用1 min步长星历解算的日凌结果与使用0.1 min步长星历的结果之差, 上下两图分别对应 $S_1S_2$ 链路和 $S_2S_1$ 链路. 两幅图中, 圆圈( $\circ$ )表示日凌持续时间之差, 对应左y轴(单位: s); 圆点( $\bullet$ )表示日凌开始时刻之差, 对应右y轴(单位: s). 图例中“diff”是“difference”的缩写.

Fig. 6 Difference of analytically solved transits using 1-minute-step ephemerides, compared with those using 0.1-minute-step ephemerides. Top is for Link  $S_1S_2$  and bottom for  $S_2S_1$ . In both frames, circles ( $\circ$ ) represent difference of durations of transits, corresponding to the left y axis, while dots ( $\bullet$ ) difference of starting epochs of transits and the right y axis. “diff” in the legends is short for “difference”.

至于其他几种步长对解析方法结果的影响, 图7展示了使用步长从10 min到90 min的星历, 解析方法解算出的日凌结果与使用0.1 min步长星历

的结果之差. 为节约篇幅, 图中只展示了 $S_1S_2$ 链路的结果,  $S_2S_1$ 链路的结果与其高度相似, 不再单独展示.

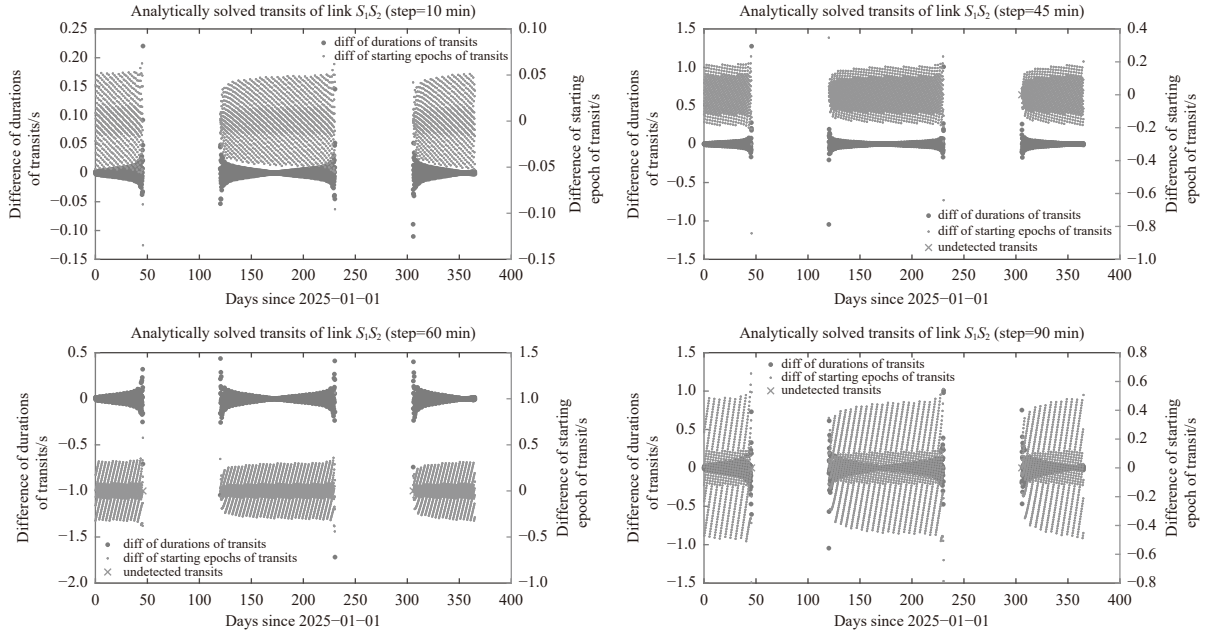


图7 解析方法使用不同步长星历所得 $S_1S_2$ 链路日凌结果与使用0.1 min步长星历的结果之差. 图中圆圈( $\circ$ )表示日凌持续时间之差, 对应左 $y$ 轴(单位: s); 圆点( $\bullet$ )表示日凌开始时刻之差, 对应右 $y$ 轴(单位: s). 3幅图中叉号( $\times$ )对应该步长下遗漏的日凌. 图例中“diff”是“difference”的缩写.

Fig. 7 Differences of analytically solved transits using ephemerides of various stepsizes, compared with those using 0.1-minute-step ephemerides. In all frames, circles ( $\circ$ ) represent difference of durations of transits, corresponding to the left  $y$  axis, while dots ( $\bullet$ ) difference of starting epochs of transits and the right  $y$  axis. Crosses ( $\times$ ) in the three frames indicate missing transits in the solutions. “diff” in the legends is short for “difference”.

观察这些图像并结合图6, 可以发现日凌解算结果的偏差基本上随着步长的增大而增大. 但即使使用90 min步长的星历, 相比使用0.1 min步长星历的差别也很小. 此时, 日凌持续时间的偏差绝大多数不超过 $\pm 0.5$  s, 最大偏差不超过 $\pm 1$  s; 日凌开始时刻的偏差绝大多数不超过 $\pm 0.6$  s, 最大偏差在 $\pm 1$  s左右. 使用大步长星历, 解算偏差较大的结果出现在日凌始末位置, 并且检测遗漏的点也在日凌始末位置. 总体来说, 这些算例和图像表明, 对于解析求解日凌的方法, 即使将星历步长从0.1 min增大到90 min, 解算出的日凌结果也相当稳定, 是可用的. 个别偏差较大或遗漏的日凌弧段也是可控、可预判的.

### 3.4 基于星链卫星星历的日凌计算

本小节算例针对星链一期卫星星座第4层的两个轨道面, 分别使用数值法和解析法计算72 h内18条链路所受日凌的情况. 对于轨道面A的18条链路, 图8展示了两种方法计算出的每条链路经历的日凌次数以及72 h内的累积时长. 从图像来看, 这一结果和表4仿真结果类似, 即在1 min间隔下, 数值法的结果会略少于解析法, 遗漏部分持续时长短于星历步长的日凌弧段. 图中数值法给出的部分总时长为零, 意味着星历中只有一个节点落在该日凌弧段内.

进一步观察其中部分链路, 可以验证上述结论. 图9展示的是07-08和09-10这两条链路的日凌

开始时间与日凌持续时长的图像. 不难发现这组图像与前面仿真算例的结果呈现出一致的形式, 例如解析法的结果更加连续、光滑, 而数值法结果则呈现出与步长一致的阶梯形式. 另一个有趣的现象是, 由于解析法只是以星历中的节点为参考去解算临近的日凌弧段, 因此能够回溯到星历开始前的日凌开始时刻. 图9里两条链路的解析结果中, 第1条日凌弧段都始于星历开始历元 $T_0$ 之前.

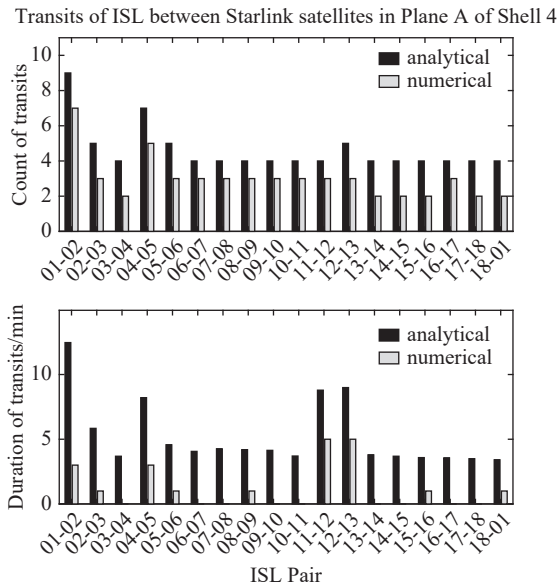


图 8 星链一期星座第4壳层轨道面A中星间链路受到的日凌, 链路编号对应两端的卫星相位编号. 上图为每条链路72 h内日凌弧段总数, 下图为每条链路72 h内日凌总时长(min). 对每条链路, 左侧柱形对应解析法结果, 右侧柱形对应数值法结果. 若记链路编号为 $S_1-S_2$ , 图中仅展示了链路 $S_1 \rightarrow S_2$ 受到的日凌, 不包括反向的 $S_2 \rightarrow S_1$ 链路.

Fig. 8 Transits of ISL between satellites in Plane A of Shell 4 in Starlink Stage 1 constellation, where each link is identified by the phase slots of the satellites. The upper frame shows the total counts of transits of each link within 72 hours, while the lower frame the total duration of transits per link. For the link of  $S_1-S_2$ , only the transits of  $S_1 \rightarrow S_2$  are demonstrated, while those of  $S_2 \rightarrow S_1$  are not.

将类似的步骤重复应用于轨道面B, 可得图10. 可以看出这段时间内该轨道面卫星之间的星间链路受日凌影响显著, 72 h每条链路都会受到35~36次日凌. 虽然数值法检测出的日凌弧段数与解析法接近, 但显然持续总时长远短于解析法的结果, 前者大约只有后者的一半.

挑选01-02和07-08两条链路进一步观察, 如图11所示. 可以明显看出, 受限于星链卫星星历1 min的步长, 数值法检测出的日凌持续总时长短于解析法的结果.

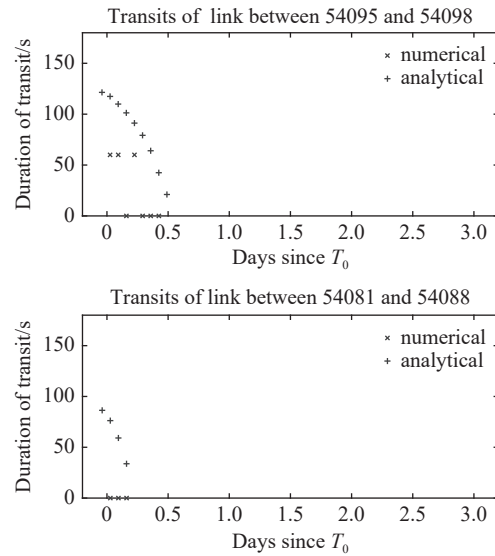


图 9 数值法和解析法得到的日凌结果. 其中横轴和纵轴分别表示日凌开始的时刻( $T_0=2025-04-10$  19:02:42 (UTC))和日凌持续的时长(s). 叉号( $\times$ )和加号( $+$ )分别表示数值法和解析法得到的结果. 标题中的编号为链路卫星的NORAD编号.

Fig. 9 Transits solved using the numerical and analytical methods, where the  $x$  and  $y$  axes respectively mean the starting epochs of the transit ( $T_0=2025-04-10$  19:02:42 (UTC)) and the duration of the transit (in seconds). Cross ( $\times$ ) and plus ( $+$ ) signs respectively stand for transits of links solved using the numerical and analytical methods. In the titles are the NORAD ID of the satellites of the links.

在使用预报星历的情况下单独执行日凌计算, 统计数值法和解析法的耗时情况. 分别将轨道面A和B中18条星间链路的日凌计算重复10次, 单次平均耗时如表5所示. 可以看出在使用外部星历, 不统计轨道预报耗时的情况下, 基于步长1 min的星历计算日凌, 解析法的耗时更占优势.

对于星链第4壳层的规模(按照72个轨道面, 每个轨道面内18颗星计), 如果在事先按照星链自主规避、维持策略生成预报星历后, 利用预报星历单独计算日凌, 显然解析方法无论在日凌计算结果还是耗时方面都是有优势的.

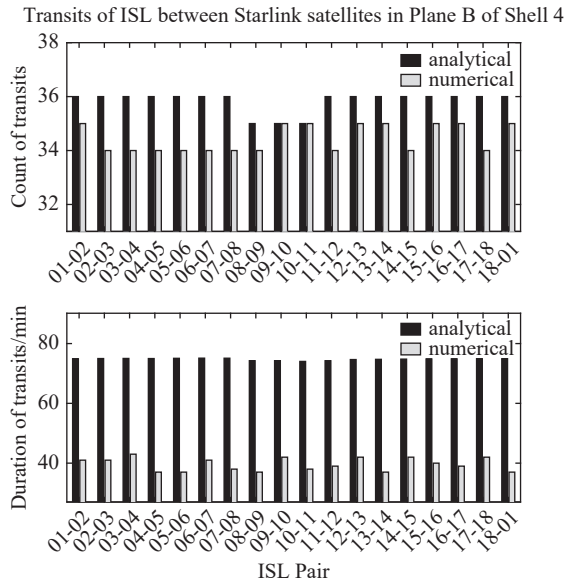


图 10 星链一期星座第4壳层轨道面B中星间链路受到的日凌, 链路编号对应两端的卫星相位编号. 上图为每条链路72 h内日凌弧段总数, 下图为每条链路72 h内日凌总时长(min). 对每条链路, 左侧柱形对应解析法结果, 右侧柱形对应数值法结果. 若记链路编号为 $S_1-S_2$ , 图中仅展示了链路 $S_1 \rightarrow S_2$ 受到的日凌, 不包括反向的 $S_2 \rightarrow S_1$ 链路.

Fig. 10 Transits of ISL between satellites in Plane B of Shell 4 in Starlink Stage 1 constellation, where each link is identified by the phase slots of the satellites. The upper frame shows the total counts of transits of each link within 72 hours, while the lower frame the total duration of transits per link. For the link of  $S_1-S_2$ , only the transits of  $S_1 \rightarrow S_2$  are demonstrated, while those of  $S_2 \rightarrow S_1$  are not.

## 4 关于本方法应用的一些讨论

根据第3节的算例, 不难发现基于解析方法计算星座卫星星间链路日凌的方法相比传统逐点搜索的方法, 最大优点是可以以2~3个量级的速度优势得到稳定、可靠的日凌结果, 包括日凌次数、日凌发生时间、日凌持续时长. 结合本方法解析公式的前提和推导过程, 下面就该方法在实际中的应用做几点讨论.

1. 文章中前提及算例都以星座卫星为例, 这是考虑到星座卫星能够很好地满足2.1节中的前提和假设, 并且星座卫星确实会因业务需要而预测、分析星间链路的日凌. 但实际上, 2.1节所述4点假设中, 仅第4条(恒定的 $\Delta\Omega, \Delta u$ )会影响到日凌方程的合理性和解的适用性, 其他条件即使不

满足, 也只是对方程的构造和求解带来一些麻烦, 并不会从本质上破坏解析方法的应用前提. 更进一步, 考虑到 $\Delta\Omega$ 的变化来自摄动, 是缓变的, 那么即使 $\Delta\Omega$ 在实际中确实发生变化, 也依然可以假设 $\Delta\Omega$ 在每一段是不变的, 通过合理控制星历步长来保证解析方法依然适用.

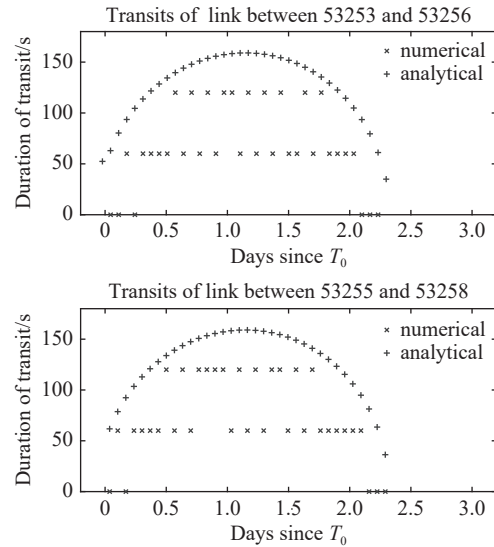


图 11 数值法和解析法得到的日凌结果. 其中横轴和纵轴分别表示日凌开始的时刻( $T_0=2025-04-10$  18:34:42 (UTC))和日凌持续的时长(s). 叉号( $\times$ )和加号( $+$ )分别表示数值法和解析法得到的结果. 标题中的编号为链路卫星的NORAD编号.

Fig. 11 Transits solved using the numerical and analytical methods, where the  $x$  and  $y$  axes respectively mean the starting epochs of the transit ( $T_0=2025-04-10$  18:34:42 (UTC)) and the duration of the transit (in seconds). Cross ( $\times$ ) and plus ( $+$ ) signs respectively stand for transits of links solved using the numerical and analytical methods. In the titles are the NORAD ID of the satellites of the links.

表 5 两种方法运行星链算例的单次平均耗时  
Table 5 Average per-run time consumption of Starlink test using the two methods

Plane ID	Numerical method/s	Analytical method/s
A	0.106	0.043
B	0.113	0.066

2. 从第3节的算例不难看出, 实际中完全可以使用解析方法计算日凌并评估其对业务的影响.

如果需要更进一步,追求高精度的日凌时刻、时长预报结果,可以先用解析方法计算出发生日凌的时间范围,然后用数值方法在局部准确搜索、计算出日凌时刻和时长.这得益于解析方法显著的速度优势和本身已经足够可靠的预估结果.即使步长较大时解析法可能在边缘处遗漏个别持续时间很短的日凌弧段,也可以在解析结果的基础上适当向前或向后扩展1个轨道周期,增加数值法的搜索范围.

3. 文章对卫星假设二体模型、对太阳使用平轨道模型是为了方便建立并求解日凌方程.实际上完全可以采用高精度数值方法外推星历,在星历的节点上解算日凌方程.在星历两个节点中间假设二体模型并不会对精度有显著的影响.这样做既可以提高星历精度,也可以保留解析求解日凌方程的优点.至于高精度数值方法,可以放宽至正常的数值外推步长(如低轨卫星取20~30 s),而不必像逐点搜索那样约束星历步长,严重限制计算速度.

## 5 结论

文章介绍了一种基于解析方法计算星座卫星星间链路日凌的算法.通过构造链路卫星进出日凌时满足的方程,可以解析计算任意链路在一段时间内的日凌解,得到弧段数以及日凌始末时间.算例表明,这一方法相比传统的基于星历逐点搜索的方法,对外推星历的步长几乎没有限制,并且计算得到的日凌结果稳定性和准确性都很好.在步长不超过轨道周期的情况下,解析方法可以稳定捕捉到几乎所有的日凌,并且日凌开始时刻和持续时长的结果也高度稳定.以文中仿真算例使用的最短步长(0.1 min)和最长步长(90 min)为例,以前者为参照,后者在1 yr内可以捕捉到99.9%以上(2881/2883)的日凌数,日凌开始时刻和日凌持续时间的偏差都不超过1 s,绝大多数稳定在 $\pm(0.5 \sim$

0.6) s以内.在以星链卫星星历为输入的算例中,解析法无论在日凌计算结果还是耗时方面均优于数值法.

得益于解析方法显著的速度优势和稳定、可靠的精度,该方法可以直接用于判断、计算星座卫星星间链路的日凌,也可以衍生出其他用法.比如(1)使用解析方法快速搜索出日凌影响时间段,然后采用限制步长的数值法精搜;(2)使用数值法外推高精度星历(不限制步长),然后使用解析法搜索、计算日凌.

**致谢** 感谢审稿人对文章提出的宝贵建议.

## 参考文献

- [1] Tapley B D, Bettadpur S, Watkins M, et al. *GeoRL*, 2004, 31: L09607
- [2] Landerer F W, Flechtner F M, Save H, et al. *GeoRL*, 2020, 47: e2020GL088306
- [3] 陈忠贵, 帅平, 曲广吉. *中国科学(E辑: 技术科学)*, 2009, 39: 686
- [4] 王冬霞, 辛洁, 薛峰, 等. *宇航学报*, 2016, 37: 1279
- [5] Tang J S, Wang H H, Chen Q L, et al. *AdSpR*, 2018, 62: 343
- [6] 张小红, 马福建. *测绘学报*, 2019, 48: 1073
- [7] Srivastava V K, Mishra P. *AerSy*, 2022, 5: 545
- [8] Jin J, Shang L, Yang Z, et al. *ApSci*, 2024, 14: 1625
- [9] Guo Y, Li M, He S, et al. *China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2012 Proceedings*. Berlin: Springer, 2012: 133
- [10] 刘林, 胡松杰, 王歆. *航天动力学引论*. 南京: 南京大学出版社, 2006: 115-150
- [11] Montenbruck O, Gill E. *Satellite Orbits: Models, Methods and Applications*. Berlin: Springer, 2000: 70-71
- [12] 汤靖师, 屈颖莹, 王琦. *天文学报*, 2023, 64: 52
- [13] Tang J S, Qu Y Y, Wang Q. *ChA&A*, 2024, 48: 161
- [14] Gooding R H. TR 88027. *NASA Technical Report*. 1988: 1
- [15] Izzo D. *CeMDA*, 2014, 121: 1
- [16] Liu A, Xu X, Xiong Y, et al. *AdSpR*, 2024, 74: 3157

# A Fast Algorithm to Calculate Transits of Inter-satellite Links between Constellation Satellites

TANG Jing-shi<sup>1,2,3</sup>

(1 School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, Nanjing 210023)

(2 Key Laboratory of Modern Astronomy and Astrophysics, Ministry of Education, Nanjing 210023)

(3 Institute of Space Environment and Astrodynamics, Nanjing 210023)

**ABSTRACT** With the development and readiness of inter-satellite link (ISL), it has been widely used in satellite constellations for navigation, communication and other purposes. As establishing or maintaining ISL can be affected by transits (also known as sun outage), transits of the links need to be calculated and predicted, so the system service can be properly assessed and scheduled. Currently the normal practice to determine and predict the transits, by building scenarios using proven commercial satellite system toolkit or by developing in-house simulation tools, is to calculate the elongation between the ISL and the line-of-sight of the Sun, based on propagated ephemerides. It is simple, straight forward and can be conveniently implemented, however, it bears a significant disadvantage that the computation is extremely CPU-intensive and therefore slow in speed. Although the predicted transits do not have to be very precise in the design phase and the two-body model may suffice, the ephemerides are always limited to small stepsize in order to properly detect the transits. Otherwise transits with short duration may be overlooked and the service assessment can be compromised. Regarding the determination and calculation of the transits, a fast algorithm is proposed in this paper. With the equation of the satellite's argument of latitude  $u$  at the transit boundary, it can be analytically determined whether a transit may occur or calculated when the transit starts or ends, allowing fast assessment of how transits affect the service. This method is also based on propagated ephemerides, but a much larger stepsize can be accepted. Tests show that the analytical method can outperform the normal practice by detecting more transits while reducing calculation time by two to three orders of magnitude. Even the stepsize of the ephemerides is close to one orbital period, this method is still able to detect more than 99.9% transits. The results are robust against varying stepsizes, where the maximum deviations of calculated onset epochs and durations of the transits would not exceed 1 second.

**Key words** celestial mechanics, methods: analytical, space vehicles: inter-satellite links, space vehicles: transit

## 附录

### 日凌方程的推导

正文2.2节给出了日凌边界处 $S_1$ 卫星的位置应满足的方程(5)式, 即下面形式的日凌方程,

$$\cos \psi^* = \frac{\hat{r}' \cdot (\hat{r}_2 - \hat{r}_1)}{2 \sin(\varphi/2)}.$$

为了方便求解, 下面通过一系列变换将其表示为 $S_1$ 的纬度辐角 $u_1$ 的显式表达式.

记 $S_1$ 和太阳的单位地心矢量分别为 $\hat{r}_1$ 和 $\hat{r}'$ , 则<sup>[10]</sup>

$$\hat{r}' \cdot \hat{r}_1 = A_1 \cos u_1 + B_1 \sin u_1, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= \cos \theta_1 \cos u' + \cos i' \sin \theta_1 \sin u', \\ B_1 &= \cos i (-\sin \theta_1 \cos u' + \cos i' \cos \theta_1 \sin u') + \\ &\quad \sin i \sin i' \sin u' = \cos i B_{11} + \\ &\quad \sin i \sin i' \sin u', \end{aligned} \quad (12)$$

上式中 $i$ 、 $i'$ 、 $u'$ 分别表示 $S_1$ 、 $S_2$ 的轨道倾角、太阳的地心平赤道坐标系中轨道的倾角(亦即黄赤交

角)及纬度辐角(近地点辐角与真近点角之和),  $\theta_1 = \Omega_1 - \Omega'$ 表示  $S_1$  与太阳在地心平赤道坐标系中升交点赤经之差.

采用相同的记法, 对于卫星  $S_2$  有

$$\begin{aligned} \hat{r}' \cdot \hat{r}_2 &= A_2 \cos u_2 + B_2 \sin u_2 = \\ &A_2 \cos(u_1 + \Delta u) + B_2 \sin(u_1 + \Delta u), \end{aligned} \quad (13)$$

且

$$\begin{aligned} A_2 &= \cos \theta_2 \cos u' + \cos i' \sin \theta_2 \sin u' = \\ &A_1 \cos \Delta \Omega + B_{11} \sin \Delta \Omega, \\ B_2 &= \cos i(-\sin \theta_2 \cos u' + \cos i' \cos \theta_2 \sin u') + \\ &\sin i \sin i' \sin u' = \cos i(B_{11} \cos \Delta \Omega - \\ &A_1 \sin \Delta \Omega) + \sin i \sin i' \sin u'. \end{aligned} \quad (14)$$

由此,

$$\begin{aligned} \hat{r}' \cdot (\hat{r}_2 - \hat{r}_1) &= [A_2 \cos(u_1 + \Delta u) + \\ &B_2 \sin(u_1 + \Delta u)] - (A_1 \cos u_1 + B_1 \sin u_1) = \\ &(A_2 \cos \Delta u + B_2 \sin \Delta u - A_1) \cos u_1 + \\ &(-A_2 \sin \Delta u + B_2 \cos \Delta u - B_1) \sin u_1. \end{aligned} \quad (15)$$

如果记

$$\begin{aligned} K^2 &= (A_2 \cos \Delta u + B_2 \sin \Delta u - A_1)^2 + \\ &(-A_2 \sin \Delta u + B_2 \cos \Delta u - B_1)^2 = \\ &(A_1^2 + B_1^2 + A_2^2 + B_2^2) - (A_1 A_2 + B_1 B_2) \\ &\cos \Delta u - 2(A_1 B_2 - A_2 B_1) \sin \Delta u, \end{aligned} \quad (16)$$

且  $K > 0$ , 则(15)式可改写为

$$\hat{r}' \cdot (\hat{r}_2 - \hat{r}_1) = K \cos(u_1 + \alpha), \quad (17)$$

其中

$$\alpha = \text{atan2} \left( \frac{A_2 \sin \Delta u - B_2 \cos \Delta u + B_1}{K}, \frac{A_2 \cos \Delta u + B_2 \sin \Delta u - A_1}{K} \right), \quad (18)$$

其中  $\text{atan2}$  表示由正弦值和余弦值确定  $[0, 2\pi)$  范围内辐角的函数.

上式中只保留了  $+K$ . 若取  $-K$  则  $\alpha$  值也会发生相应变化, 对  $u_0$  的解并无影响, 没有重复讨论的必要. 对于(17)式,  $K$ 、 $\alpha$  均是已知的, 只有  $u_1$  是需要求解的, 因此(5)式右边分子已经表示为未知量

$u_1$  的显式表达式.

方程(5)式中的  $\varphi$  表示建链卫星  $S_1$ 、 $S_2$  的地心夹角. 由球面三角公式可得

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) + \\ &\sin \phi_1 \sin \phi_2, \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $(\phi_1, \lambda_1)$ 、 $(\phi_2, \lambda_2)$  分别表示  $S_1$ 、 $S_2$  在地心平赤道坐标系中的赤经、赤纬. 由图12所示的卫星在地心平赤道坐标系中的轨道几何, 可以得到  $\lambda_2 - \lambda_1 = (\Omega_2 + \gamma_2) - (\Omega_1 + \gamma_1) = \Delta \Omega + (\gamma_2 - \gamma_1)$ , 其中  $\Delta \Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ .

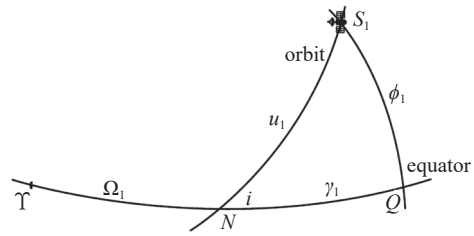


图 12 卫星的轨道几何, 其中  $i$ 、 $\Omega$ 、 $u$ 、 $\phi$  分别表示卫星的轨道倾角、轨道升交点赤经、纬度辐角及赤纬,  $\gamma$  表示赤道上轨道升交点至卫星在赤道上投影点的距离  $\widehat{NQ}$ . 各参数下标的“1”表示对应卫星  $S_1$ .

Fig. 12 Orbit geometry of the satellite, where  $i, \Omega, u, \phi$  are respectively the orbital inclination, right ascension of ascending node, argument of latitude and declination of the satellite, and  $\gamma$  is  $\widehat{NQ}$ , the spherical distance from the ascending node to the projection of the satellite on the equator. The subscript “1” means that the symbols in the figure are for satellite  $S_1$ .

图12的球面三角形  $S_1NQ$  中, 由球面三角的正弦公式、余弦公式及五元素公式, 可以得到下面的关系<sup>[10]</sup>

$$\begin{cases} \cos \phi \cos \gamma = \cos u \\ \cos \phi \sin \gamma = \sin u \cos i \\ \sin \phi = \sin u \sin i \end{cases} \quad (20)$$

展开(19)式并将(20)式代入, 整理可得

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2} (\cos \Omega - 1) \sin^2 i \cos(2u_1 + \Delta u) + \\ &\frac{1}{2} [\cos \Omega (1 + \cos^2 i) + \sin^2 i] - \\ &\sin \Delta \Omega \sin \Delta u \cos i. \end{aligned} \quad (21)$$

将日凌方程(5)式两边平方, 并将(17)和(21)两

式代入, 稍加整理可得

$$\begin{aligned} K^2 \cos^2(u_1 + \alpha) &= 2(1 - \cos \varphi) \cos^2 \psi^* = \\ &2 \cos^2 \psi^* \left[ 1 - \cos \Delta u \cos^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) + \right. \\ &\left. \cos^2 i \cos \Delta u \sin^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) + \sin \Delta \Omega \sin \Delta u \cos i \right] + \\ &2 \cos^2 \psi^* \sin^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) \sin^2 i \cos(2u_1 + \Delta u). \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{K^2}{2} \cos(2u_1 + 2\alpha) - 2 \cos^2 \psi^* \sin^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) \sin^2 i \cos(2u_1 + \Delta u) &= \\ - \frac{K^2}{2} + 2 \cos^2 \psi^* \left[ 1 - \cos \Delta u \cos^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) + \cos^2 i \cos \Delta u \sin^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) + \sin \Delta \Omega \sin \Delta u \cos i \right], \\ \Rightarrow \left[ \frac{K^2}{2} \cos 2\alpha - 2 \cos^2 \psi^* \sin^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) \sin^2 i \cos \Delta u \right] \cos 2u_1 - \\ \left[ \frac{K^2}{2} \sin 2\alpha - 2 \cos^2 \psi^* \sin^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) \sin^2 i \sin \Delta u \right] \sin 2u_1 = \\ - \frac{K^2}{2} + 2 \cos^2 \psi^* \left[ 1 - \cos \Delta u \cos^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) + \cos^2 i \cos \Delta u \sin^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) + \sin \Delta \Omega \sin \Delta u \cos i \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} C_u &= \frac{K^2}{2} \cos 2\alpha - 2 \cos^2 \psi^* \sin^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) \sin^2 i \cos \Delta u, \\ S_u &= \frac{K^2}{2} \sin 2\alpha - 2 \cos^2 \psi^* \sin^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) \sin^2 i \sin \Delta u, \\ M_u &= -\frac{K^2}{2} + 2 \cos^2 \psi^* \left[ 1 - \cos \Delta u \cos^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) + \cos^2 i \cos \Delta u \sin^2 \left( \frac{\Delta \Omega}{2} \right) + \sin \Delta \Omega \sin \Delta u \cos i \right], \quad (24) \end{aligned}$$

那么(23)式可写作

$$\begin{aligned} C_u \cos 2u_1 - S_u \sin 2u_1 &= M_u, \\ \Rightarrow \sqrt{C_u^2 + S_u^2} \left( \frac{C_u}{\sqrt{C_u^2 + S_u^2}} \cos 2u_1 - \frac{S_u}{\sqrt{C_u^2 + S_u^2}} \sin 2u_1 \right) &= M_u, \\ \Rightarrow K_q \cos(2u_1 + q) &= M_u, \quad (25) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} K_q &= \sqrt{C_u^2 + S_u^2}, \\ q &= \text{atan2}(S_u/K_q, C_u/K_q). \quad (26) \end{aligned}$$

$$K_q \cos(2u_1 + q) = M_u, \quad (27)$$

可以发现, 如果  $\psi^*$  是(22)式的解, 那么  $\pi - \psi^*$  也是其解. 观察图1可以理解, 如果  $\psi^*$  对应链路  $S_1S_2$  的日凌, 那么  $\pi - \psi^*$  对应链路  $S_2S_1$  的日凌. 这意味着虽然(22)式经过两边平方的操作后, 相比(5)式  $S_1S_2$  链路的日凌方程多出一个“增根”, 但多出的“增根”对应该反向链路的日凌. 所以下面直接解算(22)式, 同时得到这两条链路的日凌.

进一步整理(22)式, 得到

其中的辅助量由(16)、(18)、(24)、(26)等式定义.

至此, 日凌方程通过变换, 简化为下面  $u_1$  的显式表达式