

# 不同引潮力位展开之间的严格转换公式\*

张捍卫<sup>†</sup> 孙娜<sup>‡</sup> 逯智翔

(山东理工大学建筑工程与空间信息学院 淄博 255000)

**摘要** 引潮力位(Tidal Generating Potential, TGP)展开是大地测量学和天体测量学的基本理论问题,它不仅具有提高空间大地测量技术归算精度的作用,而且在地球动力学演化和地壳形变监测上也具有重要意义.由于在历史上出现过不同的Laplace展开形式,因此就有不同的潮波(谐波)展开表.这些潮波展开表,除了潮波频率相同外,潮波系数之间无法进行直接比较.通过研究不同引潮力位Laplace展开式所采用的规格化方式,在理论上完整地揭示出了不同潮波表之间的内在联系,给出了任意阶次的不同引潮力位展开表之间的统一转换公式.此外,还指出了IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service)(2010)规范第96页表6.8存在的一个错误,即3阶1次的CT (Cartwright & Tayler)展开与HW (Hartmann & Wenzel)展开系数的比值应该加上负号.

**关键词** 月球; 引潮力位(TGP), 天体测量学, 行星和卫星, 历表, 方法: 球谐展开

**中图分类号**: P129; **文献标识码**: A

## 1 引言

测站位移和重力场的固体潮效应分别可达50厘米(cm)和150微伽( $\mu\text{gal}$ ), 固体潮对低轨卫星轨道的摄动可达数十米<sup>[1]</sup>. 引潮力位(Tidal Generating Potential, TGP)的调和展开是地球科学和天文学共同的基本理论问题. 引潮力位的调和展开方法分为解析法和频谱法. 解析法是基于引潮力位的原理性公式, 通过严格的公式演绎推导, 将引潮力位展开成为一系列具有物理意义的谐波函数<sup>[2]</sup>. 频谱法则是利用天体历表, 预先计算出长时间序列的引潮力位理论数值, 再利用合适的谱分析方法, 得出不同频率分潮波的振幅<sup>[3-4]</sup>. 引潮力位的Laplace展开是大地函数与天文函数之积, 其中大地函数只与测站位置有关, 天文函数不

但与外界天体位置有关, 还与测站经度有关. 大地和天文函数可通过Legendre多项式表示, 如果Legendre多项式规格化方法不同, 那么大地和天文函数所包含内容就不相同. 不同的天文函数展开为潮波形式之后, 其系数之间无法直接比较. 目前, 关于引潮力位规格化方法主要有以下3种: 文献[2]建立的Doodson规格化方法, 简称Do规格化方法; 文献[3]建立的Cartwright & Tayler规格化方法, 简称CT规格化方法; 文献[5-6]建立的Hartmann & Wenzel规格化方法, 简称HW规格化方法. 表1列出了一些具有代表性的引潮力位展开表, 及其采用的规格化和调和展开方法. IERS2010 (International Earth Rotation and Reference Systems Service (2010))规范给出了2和3阶的CT与Do和

2025-03-18收到原稿, 2025-04-27收到修改稿

\*国家自然科学基金项目(12473068、42074002、41931075)资助

<sup>†</sup> zhanwei800@163.com

<sup>‡</sup> snjzx@163.com

HW规格化之间的转换关系<sup>[7]</sup>. 文献[8]给出了2到4阶的Do和HW规格化之间的转换关系. 不同规格化方法之间的转换参数, 是通过各阶次大地/天文函数的比对得到的. 目前, 还未有从理论层面上揭示出不同方法规格化之间的内在联系. 主要原因是最初为了方便谐波展开, 将不同阶次的大地/天文函数进行单独表示, 特别是文献[2]只是展开到了3阶, 且没有写成统一的表达式.

基于引潮力位的原理性公式, 通过研究不同学者给出的大地/天文函数, 建立它们与对应的缩合勒让德多项式之间的关系, 来揭示出不同规格

化方法之间的内在联系, 最后给出了任意阶次的转换统一公式, 并指出文献[7]给出的有关转换参数数值的一处错误.

## 2 主要的引潮力位展开表和潮汐图像

引潮力位展开是地球科学、空间科学和天文学的基本理论问题之一. 文献[2]利用严格的公式演绎推导方法, 首次给出了引潮力位的谐波展开. 自此之后, 随着天体历表精度的提高以及计算技术的发展, 很多学者进行了更为精确的引潮力位展开, 见表1所示.

表 1 部分引潮力位展开表  
Table 1 Some catalogues of TGP

Name	References	Expansion Method	Normalization	Tidal Wave	Expansion	Ephemeris
			Method	Number	Order	
D1921	[2]	Analytical Method	Do	378	3	Brown; Newcomb
XI1989	[9]	Analytical Method	Do	3070	4	EJC; Newcomb
RATGP1995	[10]	Analytical Method	Do	6499	5	ELP2000-85; VSOP87
CT1971	[3-4]	Spectral Method	CT	505	3	Brown; Newcomb
T1987	[11]	Spectral Method	CT	1200	4	DE118; LE62
HW1995	[5-6]	Spectral Method	HW	12935	6	DE200; LE200
KSM2003	[12]	Spectral Method	HW	28806	6	DE406; LE406
TGP2017	[13]	Spectral Method	HW	33528	6	DE431

文献[9-10]遵从文献[2]的解析方法, 另外在展开过程中考虑了地球扁率、章动和近地行星等因素对引潮位的影响. 由于计算机技术和频谱分析技术的迅速发展, 进入21世纪以来大部分学者基本上都是采用文献[3-4]的频谱方法. 另外, 文献[14-15]在展开过程中, 不但考虑了地球扁率和近地小行星的影响, 而且还分析了“伪波”产生的原因并给出了新的精度评定方法.

假设地球是完全弹性的固体球体;  $\alpha$ 是摄动天体 $Q$ 和研究点 $P$ 对地心的张角. 那么在引潮力的作用下, 地球产生的径向形变 $\Delta r$ 基本上正比于 $(3 \cos^2 \alpha - 1)$ , 如图1所示. 其中, 小圆和类似椭圆分别表示的是无潮汐和有潮汐情况下的地球表面.

图1表明, 正对与背对摄动天体(月球或太

阳)的地面点( $\alpha$ 等于 $0^\circ$ 和 $180^\circ$ ), 引潮力最大且方向背离地心, 形成潮汐隆起(高潮). 但是, 侧面区域( $\alpha$ 等于 $90^\circ$ 和 $270^\circ$ ), 引潮力最小且方向指向地心, 导致潮汐凹陷(低潮). 或者说, 在潮汐作用下地球由球体大致变为了椭球体.

值得注意的是, 图中的数据使用无量纲表示, 展示了地球在潮汐作用下的相对形变. 不同方向上的变化存在紧密的相互关系: 当某一方向的变化发生时, 地球的相应形变会发生变化. 具体来说, 图中的数值表示不同方向下的相对形变幅度, 其中“0.5”和“1.0”代表无量纲的相对幅值(相对量). 这些数值用于量化不同角度下的相对变化特征: 在摄动天体正对和背对方向( $\alpha$ 值为 $0^\circ$ 和 $180^\circ$ )对应的相对量为1.0, 而在侧面区域( $\alpha$ 值为 $90^\circ$ 和

270°)对应的相对量为0.5. 通过这种标注, 可以直观地体现不同方向上的形变差异, 从而展示潮汐力对地球形变的不同影响.

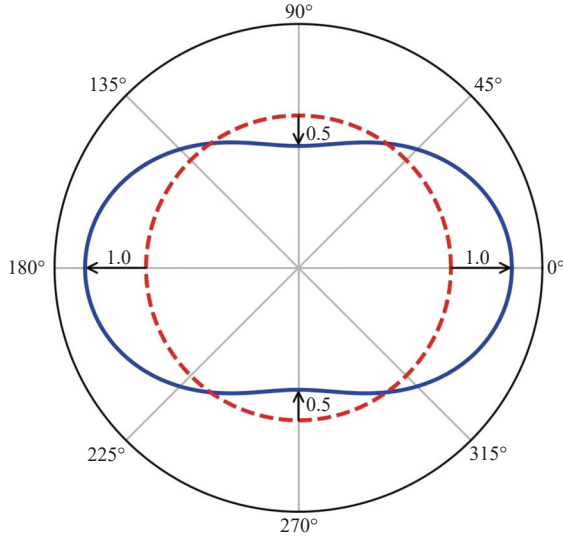


图 1 完全弹性固体地球的潮汐形变

Fig. 1 The tidal deformation of a perfectly elastic solid earth

### 3 引潮力位展开式

文献[16]指出: 摄动天体(例如: 日、月和行星)对研究点和地心的引力之差为引潮力, 它是一个位函数的梯度, 称为引潮力位.

#### 3.1 引潮力位的Legendre展开式

引潮力位的Legendre展开式[16]:

$$V_1(P) = GM \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \alpha). \quad (1)$$

其中,  $GM$ 是摄动天体 $Q$ 的引力常数; 向量 $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ 是点 $P$ 的地心距; 向量 $\boldsymbol{\rho} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 是摄动天体 $Q$ 的地心距;  $\cos \alpha = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}$ ;  $P_n(\cos \alpha)$ 是 $n$ 阶Legendre多项式.

$$V_2(P) = \left[ \left( \frac{r}{a} \right) \bar{P}_1^0(\cos \theta) \right] \times \left\{ \sqrt{\frac{15}{7}} \frac{GM}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \bar{J}_n \left( \frac{a}{\rho} \right)^{n+1} \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho} \right)^{n+2} \bar{P}_{n+1}^0(\cos \Theta) \right\} + \left[ \left( \frac{r}{a} \right) \bar{P}_1^1(\cos \theta) \right] \times \left\{ \sqrt{\frac{10}{7}} \frac{GM}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \bar{J}_n \left( \frac{a}{\rho} \right)^{n+1} \times \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho} \right)^{n+2} \bar{P}_{n+1}^1(\cos \Theta) \cos(\lambda - \Lambda) \right\}. \quad (7)$$

#### 3.2 引潮力位的Laplace展开式

假设在国际地球参考系中, 点 $P$ 的位置向量是

$$\mathbf{r} = r (\sin \theta \cos \lambda \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \sin \lambda \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3). \quad (2)$$

摄动天体 $Q$ 质心处的位置向量是

$$\boldsymbol{\rho} = \rho (\sin \Theta \cos \Lambda \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \Theta \sin \Lambda \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \Theta \hat{\mathbf{e}}_3). \quad (3)$$

这里,  $\hat{\mathbf{e}}_1$ 、 $\hat{\mathbf{e}}_2$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_3$ 分别是国际地球参考坐标系的3个单位坐标基;  $\theta$ 和 $\Theta$ 分别是点 $P$ 和点 $Q$ 的几何余纬度, 取值范围是 $[0, \pi]$ ;  $\lambda$ 和 $\Lambda$ 分别是点 $P$ 和点 $Q$ 的几何经度, 取值范围是 $[0, 2\pi)$ .

根据 $\cos \alpha = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}$ 以及(2)式和(3)式可得

$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \Theta + \sin \theta \sin \Theta \cos(\lambda - \Lambda). \quad (4)$$

根据(4)式以及球函数加法定理可得[16]:

$$P_n(\cos \alpha) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_n^m(\cos \theta) \times \bar{P}_n^m(\cos \Theta) \cos[m(\lambda - \Lambda)]. \quad (5)$$

这里,  $\bar{P}_n^m(\cos \theta)$ 称为 $n$ 阶 $m$ 级的完全规格化的缩合Legendre多项式. 将(5)式代入(1)式可得:

$$V_1(P) = \frac{GM}{\bar{\rho}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \left( \frac{r}{a} \right)^n \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho} \right)^{n+1} \left( \frac{a}{\bar{\rho}} \right)^n \times \sum_{m=0}^n \bar{P}_n^m(\cos \theta) \times \bar{P}_n^m(\cos \Theta) \cos[m(\lambda - \Lambda)]. \quad (6)$$

(6)式就是文献[14]给出的引潮力位展开式的主项. 式中,  $a$ 是地球赤道半径;  $\bar{\rho}$ 是外界天体的平均地心距.

#### 3.3 引潮力位展开式的次项或地球扁率效应

地球形状对潮汐力也有影响, 也可以表示为一个位函数 $V_2(P)$ 的梯度.  $V_2(P)$ 称为引潮力位展开式的次项, 其表达式是[15]:

这里,  $\bar{J}_n = -\bar{C}_n^0$  是完全规格化的地球引力位的带谐项系数.

### 4 关于TGP潮波展开的3个表达式

TGP展开的基本思想是: 首先将(6)式进行规格化, 例如下面的(10)式、(12)式和(13)式. 其次, 将这3个公式中的大括号项展开为谐波的形式. 由于这3个公式大括号所包含的内容不相同, 因此使得不同的潮波展开表数值之间无法进行直接比较. 本文给出这3个展开表任意阶次的彼此之间的转换关系, 并指出了文献[7]给出的有关转换参数数值的一处错误.

#### 4.1 引潮力位的Doodson展开表达式

虽然, 文献[2]只展开到3阶项, 但其思路如下: 首先, 令

$$V_1(P) = D \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ \frac{1}{\Gamma_n^m} \left(\frac{r}{a}\right)^n X_n^m(\cos \theta) \right] \times \left\{ \frac{4(N_n^m S_n^m)^2}{3(2n+1)} \Gamma_n^m \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho}\right)^{n+1} \times X_n^m(\cos \Theta) \times \left(\frac{a}{\bar{\rho}}\right)^{n-2} \cos [m(\lambda - \Lambda)] \right\}. \tag{10}$$

式中, 中括号和大括号项分别称为Do形式的大地函数和天文函数.

$$\bar{P}_n^m(\cos \theta) = N_n^m P_n^m(\cos \theta) = N_n^m S_n^m X_n^m(\cos \theta). \tag{8}$$

其中, 当阶是偶数且次等于1时

$$X_{2l}^1(\cos \theta) = [\cos \theta] \times \sin 2\theta,$$

当阶和次是其他情况时

$$X_n^m(\cos \theta) = [\cos \theta] \times \sin^m \theta.$$

这里,  $[\cos \theta]$  是关于  $\cos \theta$  的一个幂函数. 幂函数的系数必须是整数, 且互质. 例如, 表2给出了直到6阶的  $X_n^m(\cos \theta)$  表达式.

其次, 再令  $\Gamma_n^m = \max |X_n^m(\cos \theta)|$ . 同时, 约定外界天体的Doodson常数为

$$D = \frac{3}{4} \text{GM}_{\oplus} \frac{M}{M_{\oplus}} \left(\frac{a}{\bar{\rho}}\right)^3 \frac{1}{a}. \tag{9}$$

这里,  $\text{GM}_{\oplus}$  是地球引力常数.

在引入Doodson常数后, 并将(8)式代入(6)式后, 可得:

表 2 不同规格化因子的确定

Table 2 Identification of different normalization factors

$n$	$m$	$X_n^m(\theta) = \frac{1}{S_n^m} P_n^m(\theta)$	$S_n^m$	$N_n^m$	$K_n^m$	$\Gamma_n^m = \max  X_n^m(\theta) $
2	0	$1 - 3 \cos^2 \theta$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{3}$	2
2	1	$\sin 2\theta$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	1	1
2	2	$\sin^2 \theta$	3	$\sqrt{\frac{5}{12}}$	1	1
3	0	$3 \cos \theta - 5 \cos^3 \theta$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$ exact value 2, not used
3	1	$\sin \theta(1 - 5 \cos^2 \theta)$	$-\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{7}{6}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{16}{3\sqrt{15}}$
3	2	$\sin^2 \theta \cos \theta$	15	$\sqrt{\frac{7}{60}}$	5	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$
3	3	$\sin^3 \theta$	15	$\sqrt{\frac{7}{360}}$	$\frac{5}{6}$	1

表2 续  
Table 2 Continued

$n$	$m$	$X_n^m(\theta) = \frac{1}{S_n^m} P_n^m(\theta)$	$S_n^m$	$N_n^m$	$K_n^m$	$\Gamma_n^m = \max  X_n^m(\theta) $
4	0	$3 - 30 \cos^2 \theta + 35 \cos^4 \theta$	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{1}{48}$	8
4	1	$\sin 2\theta(3 - 7 \cos^2 \theta)$	$-\frac{5}{4}$	$\sqrt{\frac{9}{10}}$	$\frac{5}{24}$	2.11 (approximate)
4	2	$\sin^2 \theta(1 - 7 \cos^2 \theta)$	$-\frac{15}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{7}$
4	3	$\sin^3 \theta \cos \theta$	105	$\sqrt{\frac{1}{280}}$	$\frac{35}{6}$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$
4	4	$\sin^4 \theta$	105	$\sqrt{\frac{1}{2240}}$	$\frac{35}{48}$	1
5	0	$15 \cos \theta - 70 \cos^3 \theta + 63 \cos^5 \theta$	$\frac{1}{8}$	$\sqrt{11}$	$\frac{1}{48}$	8
5	1	$\sin \theta(1 - 14 \cos^2 \theta + 21 \cos^4 \theta)$	$\frac{15}{8}$	$\sqrt{\frac{22 \times 4!}{6!}}$	$\frac{5}{16}$	1.72 (approximate)
5	2	$\sin^2 \theta(\cos \theta - 3 \cos^3 \theta)$	$-\frac{105}{2}$	$\sqrt{\frac{22 \times 3!}{7!}}$	$\frac{35}{4}$	0.28 (approximate)
5	3	$\sin^3 \theta(1 - 9 \cos^2 \theta)$	$-\frac{105}{2}$	$\sqrt{\frac{22 \times 2!}{8!}}$	$\frac{35}{96}$	$\frac{128}{75} \sqrt{\frac{8}{15}}$
5	4	$\sin^4 \theta \cos \theta$	945	$\sqrt{\frac{22 \times 1!}{9!}}$	$\frac{105}{16}$	$\frac{16}{25\sqrt{5}}$
5	5	$\sin^5 \theta$	945	$\sqrt{\frac{22}{10!}}$	$\frac{21}{32}$	1
6	0	$5 - 105 \cos^2 \theta + 315 \cos^4 \theta - 231 \cos^6 \theta$	$-\frac{1}{16}$	$\sqrt{13}$	$\frac{1}{192}$	16
6	1	$\sin 2\theta(5 - 30 \cos^2 \theta + 33 \cos^4 \theta)$	$\frac{21}{16}$	$\sqrt{\frac{26 \times 5!}{7!}}$	$\frac{7}{64}$	2.89 (approximate)
6	2	$\sin^2 \theta(1 - 18 \cos^2 \theta + 33 \cos^4 \theta)$	$\frac{105}{8}$	$\sqrt{\frac{26 \times 4!}{8!}}$	$\frac{35}{128}$	1.55 (approximate)
6	3	$\sin^3 \theta(3 \cos \theta - 11 \cos^3 \theta)$	$-\frac{315}{2}$	$\sqrt{\frac{26 \times 3!}{9!}}$	$\frac{35}{32}$	0.71 (approximate)
6	4	$\sin^4 \theta(1 - 11 \cos^2 \theta)$	$-\frac{945}{2}$	$\sqrt{\frac{26 \times 2!}{10!}}$	$\frac{21}{64}$	1.22 (approximate)
6	5	$\sin^5 \theta \cos \theta$	10395	$\sqrt{\frac{26 \times 1!}{11!}}$	$\frac{231}{32}$	0.26 (approximate)
6	6	$\sin^6 \theta$	10395	$\sqrt{\frac{26}{12!}}$	$\frac{77}{128}$	1

## 4.2 引潮力位的CT展开表达式

文献[3]将完全规格化缔合勒让德函数表示为:

$$\bar{P}_n^m(\cos\theta) = (-1)^m \times \sqrt{4\pi(2-\delta_0^m)} W_n^m(\cos\theta). \quad (11)$$

这里 $\delta_0^m$ 是Kronecker符号, 其中

$$V_1(P) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ g_0 \left(\frac{r}{a}\right)^n W_n^m(\cos\theta) \right] \times \left\{ \frac{D}{g_0} \frac{16\pi(2-\delta_0^m)}{3(2n+1)} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho}\right)^{n+1} \left(\frac{a}{\bar{\rho}}\right)^{n-2} \times W_n^m(\cos\Theta) \cos[m(\lambda-\Lambda)] \right\}. \quad (12)$$

式中, 中括号和大括号项分别称为CT形式的大地函数和天文函数.

$$V_1(P) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ \left(\frac{r}{a}\right)^n \bar{P}_n^m(\cos\theta) \right] \times \left\{ \frac{4D}{3(2n+1)} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho}\right)^{n+1} \left(\frac{a}{\bar{\rho}}\right)^{n-2} \times \bar{P}_n^m(\cos\Theta) \cos[m(\lambda-\Lambda)] \right\}. \quad (13)$$

式中, 中括号和大括号项分别称为HW形式的大地函数和天文函数.

## 5 不同TGP展开潮波系数的转换

所谓TGP潮波展开, 就是将以上公式中的天文函数部分展开为:

$$\{\cdot\} = \sum (A_j \sin \Phi_j + B_j \cos \Phi_j). \quad (14)$$

这里,  $A_j$ 和 $B_j$ 就是潮波系数;  $\Phi_j = \omega_j t + \beta_j$ 称为潮波幅角,  $\omega_j$ 称为角频率. 由于上一节中的天文函数所包含的内容不相同, 使得(14)式的潮波系数也不同.

### 5.1 CT展开与Doodson展开之间的转换

根据(10)式和(12)式, 可得CT展开与Doodson展开潮波系数的比值是

$$\frac{\text{CT}}{D_{D0}} \Big|_n^m = f_n^m = (-1)^m \frac{D}{g_0} \frac{\sqrt{4\pi(2-\delta_0^m)}}{\Gamma_n^m N_n^m S_n^m}. \quad (15)$$

显然, 二者大地函数的比值是 $D \times (f_n^m)^{-1}$ .

### 5.2 HW展开与Doodson展开之间的转换

根据(10)式和(13)式, 可得HW展开与Doodson展开潮波系数的比值是

$$\delta_0^m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}.$$

利用(11)式, 并引入 $g_0 = \frac{GM_{\oplus}}{a^2}$ , 那么可以将

(6)式改写为:

### 4.3 引潮力位的HW展开表达式

文献[5-6]将(6)式写为:

$$\frac{\text{HW}}{D_{D0}} \Big|_n^m = F_n^m = \frac{D}{N_n^m S_n^m \Gamma_n^m}, \quad (16)$$

显然, 二者大地函数的比值是 $D \times (F_n^m)^{-1}$ .

### 5.3 HW展开与CT展开之间的转换

根据(12)式和(13)式, 可得CT展开与HW展开系数的比值是

$$\frac{\text{CT}}{\text{HW}} \Big|_n^m = F_n'^m = \frac{(-1)^m \sqrt{4\pi(2-\delta_0^m)}}{g_0}, \quad (17)$$

显然, 二者大地函数的比值是 $(F_n'^m)^{-1}$ .

表2给出了直到6阶的 $X_n^m(\cos\theta)$ 、 $S_n^m$ 和 $K_n^m$ 数值, 注意:

$$K_n^m = \frac{4(N_n^m S_n^m)^2}{3(2n+1)}. \quad (18)$$

(18)式表示的是文献[2]表达式中的系数, 见(10)式. 由于文献[2]只展开到了3阶, 需要确定 $X_n^m(\cos\theta)$ 和其绝对值的极大值 $\Gamma_n^m$ . 实际上这是一项很繁琐的工作. 之所以如此, 是因为当时完全是手动展开, 工作量极其巨大. 为便于潮波系数的比较和舍弃, 不得已必须确定 $\Gamma_n^m$ 这一数值. 为了便于不同学者

展开表与文献[2]展开表之间的比较, 3阶以内的  $\Gamma_n^m$  数值必须准确给出, 4阶及其以上采用近似值就

$$V_1(P) = D \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^n \frac{X_n^m(\cos \theta)}{\Gamma_n^m} \right] \frac{\Gamma_n^m}{\bar{\Gamma}_n^m} \times \frac{\bar{\Gamma}_n^m}{\Gamma_n^m} \left\{ \frac{4(N_n^m S_n^m)^2}{3(2n+1)} \Gamma_n^m \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho} \right)^{n+1} \times \left( \frac{a}{\bar{\rho}} \right)^{n-2} X_n^m(\cos \Theta) \cos [m(\lambda - \Lambda)] \right\} \quad (19)$$

就表示在采用近似值情况下的Doodson规格下的展开.

根据各个天体距地心的最小距离, 利用DE431历表“头文件”中给出的不同天体的引力常数, 可得到太阳系主要天体的各阶次引潮力的最大数值  $\max(g_{\text{Tide}})$ , 见表3所示.

表 3 天体各阶次引潮力的最大值(单位: 纳伽)  
Table 3 Maximum values of tidal forces of various orders of celestial bodies (unit: ngal)

Celestial Body	$n$	$\max(g_{\text{Tide}})$	Celestial Body	$n$	$\max(g_{\text{Tide}})$	
Moon	2	138174.548	Venus	2	6.743	
	3	3709.367		3	0.00099	
	4	88.515		Mars	2	0.317
	5	1.980	3		0.00005	
	6	0.043	Jupiter		2	0.789
	7	0.00089			3	0.00001
	Sun	2	53294.632	Saturn	2	0.028
3		3.469	3		0.00000	
4		0.00019	Uranus	2	0.00043	
Mercury	2	0.051	Neptune	2	0.00011	
	3	0.00001	Pluto	2	0.00000002	

根据(15)式, (16)式和(17)式以及表2中  $N_n^m$ 、 $S_n^m$  和  $\Gamma_n^m$  的表达式, 可给出不同引潮力位展开式之间的转换系数, 见表4所示.

需要指出的是, 文献[7]第96页只是给出了表4中的前两列, 且  $F_3^1$  少了一个负号. 需要指出的是该符号错误在之前的IERS版本中一直如此, 且未见有关文献指出这一问题. 另外, 文献[7]只是给出

可以了. 例如在规格化过程中, 假设  $\bar{\Gamma}_n^m (n \geq 4)$  是  $|X_n^m(\cos \theta)|$  的近似值,  $\Gamma_n^m$  是其他学者采用值, 那么

了直到3阶的不同引潮力位转换系数, 本文给出了任意阶次的不同引潮力位展开之间的转换系数.

表 4 不同引潮力位展开之间的转换系数  
Table 4 Conversion factors between different TGP expansions

CT and Doodson ( $f_n^m$ )	HW and CT ( $F_n^m$ )	HW and Doodson ( $F_n^m$ )
$f_2^0 = -\frac{\sqrt{4\pi} D}{\sqrt{5} g_0}$	$F_2^0 = \frac{2\sqrt{\pi}}{g_0}$	$F_2^0 = -\frac{D}{\sqrt{5}}$
$f_2^1 = -\frac{2\sqrt{24\pi} D}{3\sqrt{5} g_0}$	$F_2^1 = -\frac{\sqrt{8\pi}}{g_0}$	$F_2^1 = \frac{2D}{3\sqrt{15}}$
$f_2^2 = \frac{\sqrt{96\pi} D}{3\sqrt{5} g_0}$	$F_2^2 = \frac{\sqrt{8\pi}}{g_0}$	$F_2^2 = \frac{2D}{\sqrt{15}}$
$f_3^0 = -\frac{\sqrt{20\pi} D}{\sqrt{7} g_0}$	$F_3^0 = \frac{2\sqrt{\pi}}{g_0}$	$F_3^0 = -\frac{5D}{\sqrt{35}}$
$f_3^1 = \frac{\sqrt{720\pi} D}{8\sqrt{7} g_0}$	$F_3^1 = -\frac{\sqrt{8\pi}}{g_0}$	$F_3^1 = -\frac{\sqrt{90}D}{8\sqrt{7}}$
$f_3^2 = \frac{\sqrt{1440\pi} D}{10\sqrt{7} g_0}$	$F_3^2 = \frac{\sqrt{8\pi}}{g_0}$	$F_3^2 = \frac{\sqrt{180}D}{10\sqrt{7}}$
$f_3^3 = -\frac{\sqrt{2880\pi} D}{15\sqrt{7} g_0}$	$F_3^3 = -\frac{\sqrt{8\pi}}{g_0}$	$F_3^3 = \frac{\sqrt{360}D}{15\sqrt{7}}$

根据(15)式、(16)式和(17)式可得:

$$F_n^m = \frac{f_n^m}{F_n^m}. \quad (20)$$

这是文献[5]展开与文献[2]展开之间的转换系数, 但是文献[7]并未给出.

## 6 结论与讨论

对于地球上的潮汐效应来说, 在纳伽(ngal)的

精度上,对于月球需要展开到6阶,对于太阳需展开至3阶,水星、金星、火星、木星、土星均只需展开至2阶,而天王星、海王星和冥王星则不需考虑.在空间大地测量技术GPS (Global Positioning System)和 VLBI (Very Long Baseline Interferometry)等中,固体潮效应是目前能够准确计算的唯一的一种外力.

总结了历史上经常采用的3种引潮力位的Laplace展开式.按照各自的规格化开方法,给出了适用于任意阶和次的表达式以及它们潮波展开系数之间的转换公式.给出的引潮力位展开表达式,可应用于其他天体研究.特别是指出了 $F_3^{11}$ 应该加上负号.

**致谢** 感谢审稿人对文章提出的宝贵建议,使得文章的质量有了显著的提高.

## 参 考 文 献

- [1] 许厚泽. 固体地球潮汐. 武汉: 湖北科学技术出版社, 2010: 195-214
- [2] Doodson A T. RSPSA, 1921, 100: 305
- [3] Cartwright D E, Tayler R J. GeoJI, 1971, 23: 45
- [4] Cartwright D E, Edden A C. GeoJI, 1973, 33: 253
- [5] Hartmann T, Wenzel H G. BIM, 1995, 123: 9278
- [6] Hartmann T, Wenzel H G. GeoRL, 1995, 22: 3553
- [7] Luzum B, Petit G. The IERS Conventions (2010). IAU, 2012, 10: 227
- [8] 郗钦文. 地球物理学报, 2007, 50: 111
- [9] Xi Q W. BIM, 1989, 105: 7396
- [10] Roosbeek F. GeoJ, 1996, 126: 197
- [11] Tamura Y. BIM, 1987, 99: 6813
- [12] Kudryavtsev S M. JGeod, 2004, 77: 829
- [13] 雷伟伟. 时空参考系变换与精密引潮位频谱法展开研究. 焦作: 河南理工大学, 2017: 129-154
- [14] 郗钦文. 地球物理学报, 1999, 42: 69
- [15] 张捍卫, 郑勇, 马高峰. 大地测量与地球动力学, 2010, 30: 98
- [16] 方俊. 固体潮. 北京: 科学出版社, 1984: 30-58

# The Strict Transformation Formula between the Expansion of Different Tidal Generating Potential

ZHANG Han-wei    SUN Na    LU Zhi-xiang

(School of Civil Engineering and Geomatics, Shandong University of Technology, Zibo 255000)

**ABSTRACT** The expansion of tidal generating potential (TGP) is a basic theoretical problem in geodesy and astrometry. It not only improves the reduction accuracy of spatial geodesy, but also plays an important role in geodynamic evolution and crustal deformation monitoring. Since there have been different Laplace expansions in history, there are different tables of tidal wave (harmonic) expansions. These tidal wave expansion tables cannot be directly compared with each other except that the tidal wave frequencies are the same. In this paper, by studying the normalization of Laplace expansions of different tide-generating potential, the internal relations between different tide tables are revealed completely in theory, and a unified transformation formula of arbitrary order is given. It is pointed out that there is a mistake in IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service)(2010) code, that is, the ratio of 3-order 1-degree CT (Cartwright & Tayler) development to HW (Hartmann & Wenzel) development coefficient should be added with a negative sign.

**Key words** Moon: tide generating potential (TCP), astrometry, planets and satellites, ephemerides, methods: spherical harmonic expansion